Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schäfer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 155.

In vier Heften.

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1926.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 155.

Arwin, A., Einige periodische Kettenbruchentwicklungen . . . . . Seite 111

Beck, H., Über konforme Transformationen im Raume I. . . . . — 61

Bigler, Über eine *Heine*sche Potentialaufgabe . . . . . — 188

Böhmel, Hans, *Cesaro*'sche Raumkurven und *Mannheim*'sche Hilfsgerade . — 7

Buchner, Paul, Annäherung beliebiger komplexer Größen durch ganze Zahlen des Körpers $\sqrt{-2}$. Mit 4 Figuren auf einer Tafel. . . . . — 37

Disse, A., Das Fundamentalsystem für die Logarithmen eines $\mathfrak{p}$-adischen algebraischen Körpers und sein Regulator . . . . . — 225

Fraenkel, Adolf, Axiomatische Theorie der geordneten Mengen. (Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. II.) . . . . . — 129

Hasse, Helmut, Über die Einzigkeit der beiden Fundamentalsätze der elementaren Zahlentheorie . . . . . — 199

Hensel, Kurt, Über Potenzreihen von Matrizen . . . . . — 107

Kowalewski, Gerhard, Über Differentialinvarianten von Raumkurven . . . — 1

v. Ludwig, Bernhard, Von der Umkehrung eines einzelnen *Abel*schen Integrals — 26

Plessner, A., Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen . . . . . — 15

Przewisinski, Oskar, Die dynamische Stabilität der Bewegung eines Massenpunktes der von 2 festen Zentren nach dem *Newton*schen Gesetz attrahiert wird . . . . . — 173

Rédei, L., Ein neuer Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes . . . . — 103

Roeser, E., Über Koordinatensysteme im unendlich fernen und im imaginären Teil der *Bolyai-Lobatschefski*schen Ebene . . . . . — 221

Stammler, Gerhard, Elementare Betrachtungen über den Aufbau von Zahlverknüpfungen nach Gesetzen. (2. Note). . . . . — 93

Stammler, Gerhard, Elementare Betrachtungen über gesetzmäßig aufgebaute Zahlverknüpfungen im Gebiete der rationalen Zahlen . . . . . — 159

Wiegandt, Gertrud, Zur natürlichen Geometrie einer zehngliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene . . . . . — 75

Berichtigung zu der Arbeit **„Eine Axiomatisierung der Mengenlehre“** von J. v. Neumann in Bd. 154. . . . . — 128

Ausgabedaten der Hefte von Band 155.

Heft 1 ausgegeben am 24. November 1925
Heft 2 ausgegeben am 5. Februar 1926
Heft 3 ausgegeben am 15. April 1926
Heft 4 ausgegeben am 8. Juni 1926

FEB 19 1926

Grad. R. R. 1

Grad. R. R. 3

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse. Schäfer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 155.

Heft 1.

Mit 1 Tafel

Ausgegeben den 24. November

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1925

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 155. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

Kowalewski, Gerhard, Über Differentialinvarianten von Raumkurven . . . Seite 1

Böhmel, Hans, *Cesaro*'sche Raumkurven und *Mannheim*'sche Hilfsgerade . . — 7

Pleßner, A., Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen . . . . . — 15

v. Ludwig, Bernhard, Von der Umkehrung eines einzelnen *Abel*schen Integrals — 26

Buchner, Paul, Annäherung beliebiger komplexer Größen durch ganze Zahlen des Körpers $\sqrt{-2}$. Mit 4 Fig. auf einer Tafel . . . . . — 37

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Über Differentialinvarianten von Raumkurven.

Von *Gerhard Kowalewski* in Dresden.

Nach einem Satze von mir (vgl. z. B. Leipziger Berichte 1923, S. 86 f.) kann die niedrigste Differentialinvariante einer Kurve gegenüber einer r-gliedrigen ebenen Transformationsgruppe in folgender Form geschrieben werden [1]):

$$J = y_{r-1}\,\gamma\,\omega^{-(r-1)} + \beta. \tag{1}$$

Dabei sind β, γ und ω Funktionen von $x, y, y_1, \ldots, y_{r-2}$, und es läßt sich über γ und ω die weitere Aussage machen, daß ωdx das invariante Bogenelement und $\gamma(dy - y_1 dx)$ die *Pfaff*sche Grundinvariante ist. Der letztere Begriff wurde von mir eingeführt und hat sich schon in verschiedener Hinsicht als nützlich erwiesen. Während das Bogenelement ωdx als Invariante eines Kurvenelements e_{r-2} von $(r-2)$-ter Ordnung und einer *tangentialen* Infinitesimalstrecke dx, dy zu betrachten ist, stellt die *Pfaff*sche Grundinvariante eine Invariante des Elements e_{r-2} und einer von ihm sich *abzweigenden* Infinitesimalstrecke dx, dy dar.

Vorausgesetzt wird bei der Formel (1), daß $r > 2$ ist und die niedrigste Differentialinvariante keine Ordnungserniedrigung erleidet. Ich habe nachgewiesen, daß das durch Formel (1) ausgedrückte Bildungsgesetz der niedrigsten Differentialinvariante auch für Gruppen ebener Berührungstransformationen gilt, und will in vorliegender Arbeit prüfen, ob ein analoger Satz bei Transformationsgruppen in n Veränderlichen sich aufstellen läßt. Dies gelingt tatsächlich, sobald die Parameterzahl der Gruppe die Form $k(n-1)+1$ hat $(k > 0)$ und eine gewisse Transitivitätsbedingung erfüllt ist.

Ich beschränke mich bei der Darlegung auf den Fall $n = 3$. Es ist aber ohne weiteres zu erkennen, wie sich die Betrachtungen für beliebiges n gestalten würden.

§ 1. Die *Pfaff*schen Grundinvarianten bei einer räumlichen Transformationsgruppe G_r mit ungerader Parameterzahl.

Unter G_r denken wir uns eine räumliche Transformationsgruppe mit *ungerader* Parameterzahl und setzen $r > 3$ voraus. Außerdem nehmen wir an, daß G_r auf die Kurvenelemente $\mathfrak{r}$-ter Ordnung $\left(\mathfrak{r} = \frac{r-3}{2}\right)$ transitiv einwirkt. Dann lassen sich die Transformationen der Gruppe durch ihre Einwirkung auf ein solches Element charakterisieren. Wenn das Element

$$(e_{\mathfrak{r}}) \quad x, y, z, y_1, z_1, \ldots, y_{\mathfrak{r}}, z_{\mathfrak{r}}$$

[1]) Die Ableitungen von y nach x werden durch untere Indizes gekennzeichnet.

durch die zu G_r gehörige Transformation T_a (mit den Parametern $a_1, \ldots, a_r$) in

$$(E_r) \quad X, Y, Z, Y_1, Z_1, \ldots, Y_r, Z_r$$

übergeführt wird, so können wir $a_1, \ldots, a_r$ als Funktionen der Koordinaten von e_r und E_r ausdrücken:

$$(2) \qquad a_\varrho = a_\varrho\,(e_r, E_r), \qquad (\varrho = 1, \ldots, r).$$

Nun bleibt bei T_a das *Pfaff*sche System

$$dy - y_1 dx = 0, \qquad dz - z_1 dx = 0$$

invariant. Es werden also Beziehungen von folgender Art gelten:

$$(3) \quad \begin{cases} dY - Y_1 dX = l_1\,(dy - y_1\,dx) + m_1\,(dz - z_1 dx), \\ dZ - Z_1 dX = l_2\,(dy - y_1\,dx) + m_2\,(dz - z_1 dx), \end{cases}$$

wo die l, m von x, y, z, y_1, z_1 und $a_1, \ldots, a_r$ abhängen. Setzt man für $a_1, \ldots, a_r$ die Ausdrücke (2) ein, so erscheinen die l, m als Funktionen von e_r und E_r. Die Gleichungen (3) gelten dann, sobald nur das groß Geschriebene mit dem klein Geschriebenen durch eine Transformation der Gruppe zusammenhängt. Dieser Zusammenhang bleibt aber erhalten, wenn man unter Festhaltung des Großen das Kleine einer beliebigen Transformation der Gruppe unterwirft. Man erkennt auf solche Weise, daß zwei invariante *Pfaff*sche Ausdrücke

$$(4) \quad \begin{cases} \Pi_1 = \lambda_1\,(e_r)\,(dy - y_1 dx) + \mu_1\,(e_r)\,(dz - z_1 dx), \\ \Pi_2 = \lambda_2\,(e_r)\,(dy - y_1 dx) + \mu_2\,(e_r)\,(dz - z_1 dx) \end{cases}$$

vorhanden sind [1]). Wegen ihrer Herkunft aus den Relationen (3) haben sie eine von Null verschiedene Determinante $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1$. Daher kann jeder ähnlich gebaute Ausdruck Π in der Form $\varrho_1\,(e_r)\,\Pi_1 + \varrho_2\,(e_r)\,\Pi_2$ geschrieben werden. Soll er wie Π_1 und Π_2 die Invarianteneigenschaft besitzen, so müssen sich ϱ_1 und ϱ_2 invariant verhalten. Dies ist aber wegen der Transitivität der Elemente e_r nur in der Weise möglich, daß sie sich auf Konstanten reduzieren. Π hat also die Form $c_1\Pi_1 + c_2\Pi_2$. Diese linearen Kombinationen aus Π_1 und Π_2 sind die einzigen Invarianten vom Typus

$$\lambda\,(e_r)\,(dy - y_1 dx) + \mu\,(e_r)\,(dz - z_1 dx).$$

Π_1 und Π_2 nenne ich die *Pfaff*schen *Grundinvarianten*. Sie lassen sich eindeutig fixieren, indem man verlangt, daß für ein gewisses Anfangselement e_r^0 von allgemeiner Art $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ in $1, 0, 0, 1$ übergehen sollen.

§ 2. Die beiden niedrigsten Differentialinvarianten einer Kurve gegenüber der Gruppe G_r und ihre Beziehung zum invarianten Bogenelement und den *Pfaff*schen Grundinvarianten.

Daß eine Raumkurve gegenüber G_r zwei Differentialinvarianten $(r+1)$-ter Ordnung hat, die in bezug auf y_{r+1} und z_{r+1} voneinander unabhängig sind, folgt aus der Betrachtung des zugehörigen vollständigen Systems, und das war der Standpunkt, den *Lie* solchen Fragen gegenüber stets einnahm. Man kann sich aber auch einer ganz elementaren Betrachtung bedienen, die wir sogleich darlegen werden,

[1]) Da E_r festgehalten wird, braucht bei den λ, μ nur die Abhängigkeit von e_r hervorgehoben zu werden.

und hat dann den Vorteil, diese Differentialinvarianten in besonders einfacher Form zu erhalten, nämlich linear in den höchsten Ableitungen y_{r+1} und z_{r+1}.

Wenn

$$(5)\qquad \begin{cases} X = X\,(x, y, z, a_1, \ldots, a_r), \\ Y = Y\,(x, y, z, a_1, \ldots, a_r), \\ Z = Z\,(x, y, z, a_1, \ldots, a_r) \end{cases}$$

eine Transformation aus G_r ist, so ergeben sich bei der Erweiterung dieser Transformation auf die Kurvenelemente folgende Gleichungen:

$$Y_1 = \frac{Y_x + y_1 Y_y + z_1 Y_z}{X_x + y_1 X_y + z_1 X_z},$$

$$Z_1 = \frac{Z_x + y_1 Z_y + z_1 Z_z}{X_x + y_1 X_y + z_1 X_z},$$

$$Y_2 = \frac{\left(Y_y \frac{dX}{dx} - X_y \frac{dY}{dx}\right) y_2 + \left(Y_z \frac{dX}{dx} - X_z \frac{dY}{dx}\right) z_2}{\left(\frac{dX}{dx}\right)^3} + \cdots,$$

$$Z_2 = \frac{\left(Z_y \frac{dX}{dx} - X_y \frac{dZ}{dx}\right) y_2 + \left(Z_z \frac{dX}{dx} - X_z \frac{dZ}{dx}\right) z_2}{\left(\frac{dX}{dx}\right)^3} + \cdots,$$

$$Y_3 = \frac{\left(Y_y \frac{dX}{dx} - X_y \frac{dY}{dx}\right) y_3 + \left(Y_z \frac{dX}{dx} - X_z \frac{dY}{dx}\right) z_3}{\left(\frac{dX}{dx}\right)^4} + \cdots,$$

$$Z_3 = \frac{\left(Z_y \frac{dX}{dx} - X_y \frac{dZ}{dx}\right) y_3 + \left(Z_z \frac{dX}{dx} - X_z \frac{dZ}{dx}\right) z_3}{\left(\frac{dX}{dx}\right)^4} + \cdots$$

usw. Dabei deuten die Punkte jedesmal Glieder von niedrigerer Ordnung an.

Geht man in diesem Erweiterungsprozeß bis zur Ordnung r, so kann man aus den gewonnenen Gleichungen in Verbindung mit (5) die Parameter a durch e_r und E_r ausdrücken und gewinnt so die Relationen (2). Nun werden diese Ausdrücke in die beiden Gleichungen eingesetzt, die beim nächsten Schritt des Erweiterungsverfahrens entstehen. Diese lauten dann:

$$(6)\qquad \begin{cases} Y_{r+1} = \dfrac{\left[Y_y \frac{dX}{dx} - X_y \frac{dY}{dx}\right] y_{r+1} + \left[Y_z \frac{dX}{dx} - X_z \frac{dY}{dx}\right] z_{r+1}}{\left[\frac{dX}{dx}\right]^{r+2}} + \beta\,(e_r, E_r), \\ Z_{r+1} = \dfrac{\left[Z_y \frac{dX}{dx} - X_y \frac{dZ}{dx}\right] y_{r+1} + \left[Z_z \frac{dX}{dx} - X_z \frac{dZ}{dx}\right] z_{r+1}}{\left[\frac{dX}{dx}\right]^{r+2}} + \gamma\,(e_r, E_r). \end{cases}$$

Die eckige Einklammerung soll hier andeuten, daß $a_1, \ldots, a_r$ durch ihre Ausdrücke (2) ersetzt worden sind.

Wenn man nun E_{r+1} festhält und e_{r+1} einer beliebigen Transformation der Gruppe G_r unterwirft, so bleiben die Gleichungen (6) bestehen. Daher stellen die rechten Seiten dieser Gleichungen nach Fixierung von E_r Differentialinvarianten dar. Das sind die beiden zu Anfang dieses Paragraphen erwähnten Differentialinvarianten $(r+1)$-ter Ordnung. Die Determinante der Koeffizienten von y_{r+1} und z_{r+1} hat folgenden Wert:

$$\left[\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(x, y, z)}\right] : \left[\frac{dX}{dx}\right]^{2r+3}, \tag{7}$$

ist also von Null verschieden.

Kehren wir jetzt zu den Relationen (3) zurück, von denen wir zu den *Pfaff*schen Grundinvarianten (4) gelangten, so ergibt sich durch Vergleichung der Koeffizienten von dy und dz

$$l_1 = \frac{Y_y \frac{dX}{dx} - X_y \frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}}, \qquad m_1 = \frac{Y_z \frac{dX}{dx} - X_z \frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}},$$

$$l_2 = \frac{Z_y \frac{dX}{dx} - X_y \frac{dZ}{dx}}{\frac{dX}{dx}}, \qquad m_2 = \frac{Z_z \frac{dX}{dx} - X_z \frac{dZ}{dx}}{\frac{dX}{dx}},$$

und die *Pfaff*schen Grundinvarianten können unter Benutzung der eckigen Klammern, deren besondere Bedeutung oben erklärt wurde, so geschrieben werden:

$$(4^*)\quad \begin{cases} \Pi_1 = \dfrac{\left[Y_y \frac{dX}{dx} - X_y \frac{dY}{dx}\right](dy - y_1 dx) + \left[Y_z \frac{dX}{dx} - X_z \frac{dY}{dx}\right](dz - z_1 dx)}{\left[\frac{dX}{dx}\right]}, \\ \Pi_2 = \dfrac{\left[Z_y \frac{dX}{dx} - X_y \frac{dZ}{dx}\right](dy - y_1 dx) + \left[Z_z \frac{dX}{dx} - X_z \frac{dZ}{dx}\right](dz - z_1 dx)}{\left[\frac{dX}{dx}\right]}. \end{cases}$$

Nun brauchen wir noch eine Bemerkung über das invariante Bogenelement $\omega(e_r)\,dx$. Wenn man in

$$dX = \frac{dX}{dx}\,dx$$

auf der rechten Seite statt $a_1, \ldots, a_r$ die Ausdrücke (2) einsetzt, so ergibt sich

$$dX = \left[\frac{dX}{dx}\right] dx = \omega(e_r, E_r)\,dx\,.$$

Diese Gleichung gilt, sobald groß Geschriebenes und klein Geschriebenes durch eine Transformation der Gruppe G_r zusammenhängen. Daher bleibt die rechte

Seite ungeändert, wenn man unter Festhaltung des Großen das Kleine irgend einer Transformation der Gruppe unterwirft. $\omega\,(e_r, E_r)\,dx$ stellt somit nach Fixierung von E_r ein invariantes Bogenelement dar und kann, da E_r festliegt, in der Form $\omega\,(e_r)\,dx$ geschrieben werden. Man darf, kurz gesagt, $\omega\,(e_r)$ mit $\left[\frac{dX}{dx}\right]$ identifizieren.

Beachtet man nun die Gleichungen (4), (4*), (6) und die soeben über ω gemachte Feststellung, so ergibt sich der Schluß, daß die beiden Differentialinvarianten $(r+1)$-ter Ordnung, die eine Kurve gegenüber der Gruppe G_r besitzt, in folgender Form geschrieben werden können:

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} I_{r+1} = \omega^{-(r+1)}\,(\lambda_1 y_{r+1} + \mu_1 z_{r+1}) + \beta\,(e_r)\,, \\ J_{r+1} = \omega^{-(r+1)}\,(\lambda_2 y_{r+1} + \mu_2 z_{r+1}) + \gamma\,(e_r)\,. \end{cases}$$

Dabei ist $\omega\,(e_i)\;dx$ das invariante Bogenelement und

$$\lambda_1\,(dy - y_1 dx) + \mu_1\,(dz - z_1 dx)\,,$$
$$\lambda_2\,(dy - y_1 dx) + \mu_2\,(dz - z_1 dx)$$

sind die *Pfaff*schen Grundinvarianten der Gruppe G_r.

Man kann es, wie oben bereits gesagt wurde, so einrichten, daß sich $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ für ein gewisses Anfangselement e_r^0 auf 1, 0, 0, 1 reduzieren. Durch Beigabe eines konstanten Faktors kann man ferner bewirken, daß ω für $e_r = e_r^0$ zu 1 wird, und durch Hinzufügen additiver Konstanten schließlich noch erreichen, daß α und β für $e_r = e_r^0$ verschwinden. Dann gehen aber I_{r+1} und J_{r+1} in y_{r+1} und z_{r+1} über. Sie sind nach einer *Lie*schen Ausdrucksweise die zu e_r^0 gehörigen Hauptlösungen des vollständigen Systems, dem diese Differentialinvarianten genügen.

Man sieht die volle Analogie, die zwischen den Formeln (I) und der Formel (1) besteht. Es handelt sich hier um ein allgemeines Strukturgesetz, das auch für die Differentialinvarianten der Kurven in höheren Räumen gilt, wobei allerdings hinsichtlich der Parameterzahl der Gruppe die früher angegebene Einschränkung gemacht werden muß. Es bedarf kaum der Erwähnung, daß sich ähnliche Formeln auch für andere Arten von Differentialinvarianten aufstellen lassen und daß sich daran eine vereinfachte Berechnungsweise dieser Größen anschließt, falls von der Gruppe nur die infinitesimalen Transformationen als bekannt vorausgesetzt werden.

Aus der unter (7) angegebenen Determinante

$$\frac{\partial\,(I_{r+1},\, J_{r+1})}{\partial\,(y_{r+1},\, z_{r+1})}$$

läßt sich, was nicht unerwähnt bleiben soll, das invariante Volumelement $\Omega\,(e_r)\;dxdydz$ der Gruppe G_r berechnen, wenn man die Bemerkung macht, daß dieses mit

$$\left[\frac{\partial\,(X, Y, Z)}{\partial\,(x, y, z)}\right] dxdydz$$

identifiziert werden kann. Es ergibt sich dann folgender Ausdruck für das invariante Volumelement:

$$\omega^{2r+3} \frac{\partial (I_{r+1}, J_{r+1})}{\partial (y_{r+1}, z_{r+1})} dxdydz .$$

Es handelt sich hierbei um eine Invariante des Kurvenelements e_r und eines umgebenden infinitesimalen Raumstückes.

Cesaro'sche Raumkurven und *Mannheim*'sche Hilfsgerade.

Von *Hans Böhmel* in Naumburg a. S.

In dem Artikel: Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces [1]) und in verschiedenen Noten in den Comptes Rendus [2]) gibt *Mannheim* u. a. eine „Darstellung" der Regelflächen durch eine ebene Kurve und daran anschließend die Ableitung gewisser Eigenschaften von Klassen von Raumkurven (*Bertrand*sche Kurven; Kurven der Klasse $A\varkappa^2 + A\tau^2 = \varkappa$, wo $\varkappa, \tau$ die beiden Krümmungen bedeuten). Diese Methode läßt sich allgemein auf *Cesaro*sche Raumkurven erweitern [3]).

Der Zusammenhang zwischen Regelfläche und der ebenen „Bildkurve" ist kurz folgender: Jedem Punkte der Erzeugenden einer Regelfläche ist eindeutig eine Tangentialebene zugeordnet und umgekehrt. Wählt man einen Punkt O auf dieser Erzeugenden als Ausgangspunkt, seine Tangentialebene als Ausgangsebene, so läßt dieser Zusammenhang sich ausdrücken durch

$$y \operatorname{tg} \varphi + a\, y + b \operatorname{tg} \varphi = 0 \tag{1}$$

wo y die Entfernung der betrachteten Punkte von O, φ der Winkel seiner Tangentialebene gegen die Ausgangsebene, a und b Konstante sind. Setzt man $\frac{y}{\operatorname{tg} \varphi} = x$, so erhält man:

$$y + a\, x + b = 0, \tag{2}$$

die Gleichung einer Geraden — der *Mannheim*schen Hilfsgeraden —, wenn man die Erzeugende als Y-Achse, eine Senkrechte dazu als X-Achse wählt.

Beschreibt O eine Kurve auf der Regelfläche, und läßt man stets die Y-Achse in die Erzeugenden der Regelfläche fallen, so erhält man eine Schar von Hilfsgeraden, die eine Kurve — die *Mannheim*sche Bildkurve — umhüllen. Das Lot vom Koordinatenanfang auf die Hilfsgerade gibt auf der Hilfsgeraden den Punkt der

[1]) *Liouville*: Journal de Mathématiques 2e série, t. XVII (1872).

[2]) Comptes Rendus hebdomaires t. 85 (1877); t. 86 (1878).

[3]) Vgl. Diss. *Böhmel*, Jena 1920 (nicht im Druck erschienen): Untersuchungen zu den Kurven der Klassen $A\varkappa^2 + C\tau^2 = \varkappa$ und $A\varkappa^2 + C\tau^2 = \tau$.

Regelfläche, der der Striktionslinie angehört. Ist die Regelfläche Hauptnormalenfläche der vom Punkte O beschriebenen Kurve, so sind die Achsenabschnitte der Hilfsgeraden auf der X- und Y-Achse der Torsionsradius und der Krümmungsradius der Kurve O. Dem Schnittpunkt zweier infinitesimal benachbarten Hilfsgeraden entspricht ein Punkt auf der Hauptnormalenfläche der Kurve O, für den diese entgegengesetzte gleiche Hauptkrümmungsradien hat. Die Ordinaten dieser Punkte sind also ihre Entfernungen vom zugehörigen Punkte der von O beschriebenen Kurve.

Die Gleichung der Hilfsgeraden ist dann:

$$\varkappa y + \tau x = 1. \tag{3}$$

Umhüllen die Hilfsgeraden einen Punkt, so erhält man:

$$a\tau + b\varkappa = 1 \tag{4}$$

die Gleichung der *Bertrand*schen Kurvenklasse [1]).

Soll von den Hilfsgeraden der Kegelschnitt:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{5}$$

umhüllt werden, so muß seine Tangentialgleichung für den Berührungspunkt x_0, y_0

$$x(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + y(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}) = 0$$

mit der Gleichung der Hilfsgeraden identisch sein. D. h.

$$\tau = -\frac{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}}{a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}}; \qquad \varkappa = -\frac{a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}}{a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}}.$$

Das gibt:

$$x_0 = \frac{a_{11}\tau + a_{12}\varkappa - a_{13}}{a_{31}\tau + a_{32}\varkappa - a_{33}}; \qquad y_0 = \frac{a_{21}\tau + a_{22}\varkappa - a_{23}}{a_{31}\tau + a_{32}\varkappa - a_{33}},$$

wenn mit a_{ik} die adjungierten Unterdeterminanten zu den Elementen a_{ik} der Determinante:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bezeichnet werden.

Für $\delta \neq 0$ ergibt dies in die Gleichung des Kegelschnittes eingesetzt:

$$a_{11}\tau^2 + 2a_{12}\varkappa\tau + a_{22}\varkappa_2 + a_{33} = 2a_{13}\tau + 2a_{23}\varkappa. \tag{6}$$

Wir haben daher:

Die Kurven der Klassen (6) — d. h. Raumkurven mit allgemeiner quadratischer Beziehung zwischen den beiden Krümmungen — haben als *Mannheim*sche Bildkurve einen Kegelschnitt (5).

Wird $a_{33} = 0$, so stellt (5) eine Parabel dar, (6) wird dann die Gleichung der *Cesaro*schen Kurvenklasse. Also: Die *Cesaro*schen Raumkurven haben als *Mannheim*sche Bildkurve stets eine Parabel.

Im folgenden sollen nun einige spezielle Lagen der Parabel benutzt werden, um zu gewissen speziellen *Cesaro*schen Kurvenklassen gemeinsame Eigenschaften aufzustellen.

---

[1]) *Mannheim* l. c.

Für die Parabel, die die Y-Achse als Achse und den Scheitelabstand q hat, deren Gleichung also lautet:

$$x^2 = 2py + 2pq \tag{7}$$

wird in der allgemeinen Kegelschnittgleichung:

$$a_{11} = 1; \quad a_{12} = a_{22} = a_{13} = 0; \quad a_{23} = -p; \quad a_{33} = -2pq\,.$$

Also:

$$a_{11} = -p^2; \quad a_{12} = a_{13} = a_{33} = 0; \quad a_{22} = -2pq; \quad a_{23} = p\,.$$

Ihr entspricht also die Kurvenklasse:

$$\frac{p}{2}\,\tau^2 + q\varkappa^2 + \varkappa = 0\,. \tag{8}$$

Die Scheiteltangente einer Parabel halbiert nun den Abschnitt jeder anderen Parabeltangente zwischen ihrem Berührungspunkt und ihrem Schnittpunkt mit der Parabelachse.

Da die Parabeltangente Hilfsgerade ist, so entspricht ihrem Berührungspunkt der Punkt der Hauptnormalenfläche der entsprechenden Raumkurve, für den diese entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat; der Schnittpunkt mit der Hauptachse, die hier die Y-Achse ist, entspricht dem Krümmungsmittelpunkt; und der Schnittpunkt mit der Scheiteltangente entspricht einem Punkt, der von der betrachteten Raumkurve den konstanten Abstand q hat. Also:

Für die Kurven der Klassen (8) halbieren die Punkte auf der Hauptnormalen, die von der Grundkurve den konstanten Abstand q haben, den Abschnitt auf der Hauptnormalen, der begrenzt wird von Krümmungsmittelpunkt und dem Punkt, für den die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat.

Für die Parabel:

$$x^2 = 2py + p^2 \tag{9}$$

fällt der Brennpunkt in den Koordinatenanfang; da $q = \frac{p}{2}$ ist, so ist die Gleichung der entsprechenden Kurvenklasse

$$\frac{p}{2}\,(\tau^2 + \varkappa^2) + \varkappa = 0\,, \tag{10}$$

ein häufig behandelter Fall.

Der Fußpunkt des Lotes vom Brennpunkt auf jede Tangente der Parabel liegt auf der Scheiteltangente. Also folgt hier: Für die Kurven der Klasse (10) teilt die Striktionslinie der Hauptnormalenfläche den Abschnitt auf der Hauptnormalen in gleiche Teile, der zwischen Krümmungsmittelpunkt und dem Punkt liegt, für den die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat [1]).

Der Parabel

$$x^2 = 2py\,, \tag{11}$$

[1]) *Mannheim*: Comptes Rendus t. 85 (1877), p. 849.

deren Scheitel im Koordinatenanfang liegt, entspricht die Kurvenklasse:

$$\frac{p}{2}\,\tau^2 + \varkappa = 0\,. \tag{12}$$

Aus der Lage dieser Parabel folgt sofort:

Die Kurven der Klasse (12) halbieren auf ihren Hauptnormalen den Abschnitt zwischen Krümmungsmittelpunkt und dem Punkt, für den die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat.

Betrachtet man die Parabel

$$y^2 = 2px + 2pq \tag{13}$$

mit der X-Achse als Achse und dem Scheitelabstand q, so sind hier:

$$a_{22} = 1; \quad a_{11} = a_{12} = a_{23} = 0; \quad a_{13} = -p; \quad a_{33} = -2pq,$$

also:

$$a_{11} = -2pq; \quad a_{12} = a_{23} = a_{33} = 0; \quad a_{13} = p; \quad a_{22} = -p^2,$$

demnach die Gleichung der zugehörigen Kurvenklasse:

$$\frac{p}{2}\,\varkappa^2 + q\tau^2 + \tau = 0\,. \tag{14}$$

Hier ergibt sich aus der Lage der Parabel der Satz:

Diejenigen Punkte auf den Hauptnormalen einer Kurve der Klasse (14), die den Abschnitt zwischen Kurve und Krümmungsmittelpunkt im Verhältnis $\left(\frac{1}{\tau} + q\right) : -q$ teilen, halbieren den Abschnitt zwischen den Punkten der Kurve und den Punkten, für den die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat.

Der Parabel

$$y^2 = 2px + p^2 \tag{15}$$

entspricht die Kurvenklasse:

$$\frac{p}{2}\,(\varkappa^2 + \tau^2) + \tau = 0\,. \tag{16}$$

Es sind dies die Kurven mit konstanten Windungsparameter. Das Lot vom Brennpunkt der Parabel (der hier Koordinatenanfang ist) auf jede andere Tangente trifft diese in ihrem Schnittpunkt mit der Scheiteltangente. Daraus geht hervor:

Die Striktionslinie der Hauptnormalenfläche einer Kurve der Klasse (16) teilt den Abschnitt auf der Hauptnormalen zwischen dem Kurvenpunkte und dem Punkte in gleiche Teile, für den die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat.

Die Parabel

$$y^2 = 2px \tag{17}$$

führt auf die Kurvenklasse

$$\frac{p}{2}\,\varkappa^2 + \tau = 0\,. \tag{18}$$

Hier ergibt sich sofort der Satz:

Auf der Hauptnormalen einer Kurve der Klasse (18) teilt der Krümmungsmittelpunkt den Abschnitt zwischen Kurvenpunkt und dem Punkt in gleiche Teile, für den die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat.

Die Verschiebung der Parabel (17) in die folgende:

$$(19) \qquad (y-a)^2 = 2px$$

macht:

$$a_{11} = a_{12} = 0; \quad a_{13} = -p; \quad a_{22} = 1; \quad a_{23} = -a; \quad a_{33} = a^2;$$
$$a_{11} = a_{23} = a_{33} = 0; \quad a_{12} = ap; \quad a_{13} = p; \quad a_{22} = -p^2,$$

gibt also die Kurvenklasse:

$$(20) \qquad p\varkappa^2 - 2a\varkappa\tau = 2\tau,$$

die genauer von *Spieweck* [1]) behandelt ist.

Entsprechend der Verschiebung der Parabel ergibt sich hier der Satz:

Der Krümmungsmittelpunkt der Kurven der Klasse (20) liegt in der Mitte zwischen den Punkten der Hauptnormalenflächen, für die die Hauptkrümmungsradien entgegengesetzt gleich sind, und den um die konstante Strecke a von der Grundkurve entfernten Punkten der Hauptnormalen.

Die Verschiebung der Parabel (11) $x^2 = 2py$ in die Parabel:

$$(21) \qquad (x-a)^2 = 2py$$

gibt:

$$a_{11} = 1; \quad a_{12} = a_{22} = 0; \quad a_{13} = -a; \quad a_{23} = -p; \quad a_{33} = a^2;$$
$$a_{11} = -p^2; \quad a_{12} = ap; \quad a_{22} = a_{13} = a_{33} = 0; \quad a_{23} = p.$$

Die zugehörige Kurvenklasse wird:

$$(22) \qquad p\tau^2 - 2a\varkappa\tau + 2\varkappa = 0.$$

Der Schnittpunkt der Tangente mit der Achse der Parabel hat die Ordinate:

$$u = -\frac{2}{p\tau^2}.$$

Daraus geht hervor:

Für die Kurven der Klasse (22) wird der Abschnitt auf der Hauptnormalen zwischen dem um $u = -\frac{2}{p\tau^2}$ entfernten Punkt und dem Punkt, für den die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat, von der Kurve selbst halbiert.

Der Parabel

$$(23) \qquad (y-a)^2 = 2px + p^2$$

entspricht die Kurvenklasse:

$$(24) \qquad p(\varkappa^2 + \tau^2) = 2\tau(a\varkappa - 1).$$

---

[1]) *Spieweck*: Genauere Untersuchung der Kurven $A\varkappa + B\tau = C\frac{\tau}{\varkappa}$. Diss. Halle 1919.

Die Ordinate der Schnittpunkte der Scheiteltangente mit einer beliebigen Tangente ist:

$$u = -\frac{p}{2}\frac{\varkappa}{\tau}.$$

Also:

Für die Kurven der Klasse (24) halbiert der Punkt auf der Hauptnormalen, der den Abstand $u = -\frac{p}{2}\frac{\varkappa}{\tau}$ hat, den Abschnitt zwischen dem um den konstanten Abstand a von der Grundkurve entfernten Punkt und dem Punkt, für den die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat.

Die Parabel, die in den Punkten $x = 0$, $y = a$ und $x = a$, $y = 0$ die Achsen berührt, hat die Gleichung:

(25) $$(x + y - a)^2 - 4xy = 0.$$

Die Gleichung der zugehörigen Kurvenklasse ist:

(26) $$a\varkappa\tau = \varkappa + \tau.$$

Der Schnittpunkt der Parabelachse mit einer beliebigen Parabeltangente hat die Ordinate:

$$u = \frac{(\varrho - a)\varrho}{a}.$$

Daraus ergibt sich also der Satz:

Der Punkt auf der Hauptnormalenfläche der Kurven der Klasse (26), dessen Abstand sich zum Abstand der Krümmungsmittelpunktes verhält, wie der Abstand des Krümmungsmittelpunktes von dem um die konstante Strecke a von der Grundkurve entfernten Punkte zu dem Abstand dieses Punktes von der Grundkurve, liegt ebensoweit von der Striktionslinie der Hauptnormalenfläche entfernt wie der Punkt, für den die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat.

Die Parabel

(27) $$(x - a)^2 = 2p\left(y - \frac{p}{2}\right)$$

hat die X-Achse als Leitlinie. Die Schnittpunkte einer Sekante durch den Brennpunkt mit der Parabel bilden mit dem Brennpunkt und dem Schnittpunkt mit der Leitlinie vier harmonische Punkte. Die Tangenten in den Schnittpunkten schneiden sich unter rechtem Winkel auf der Leitlinie. Die Abstände der Berührungspunkte von der Leitlinie verhalten sich also wie die Abstände dieser Punkte von der Geraden $y = p$, die durch den Brennpunkt geht.

Die zugehörige Gleichung der Kurvenklasse ist:

(28) $$p\,(\varkappa^2 - \tau^2) + 2a\varkappa\tau = 2\varkappa.$$

Zu jeder solchen Sekante durch den Brennpunkt gehören zwei Tangenten, die auf der X-Achse denselben Abschnitt abschneiden, also denselben Torsionsradius ergeben, aber verschiedene Werte für die entsprechenden Krümmungsradien. Wegen der quadratischen Beziehung zwischen $\varkappa$ und τ gehören zu jedem Torsions-

radius gerade zwei Werte von Krümmungsradien. Betrachtet man also solche Paare von Hauptnormalen der Kurven (28), die denselben Torsionsradius haben, so gilt die Beziehung: Die Entfernungen von der Grundkurve der beiden Punkte, für die die Hauptnormalenfläche entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien hat, verhalten sich zu einander wie ihre Entfernungen von der um die konstante Strecke p von der Grundkurve entfernten Kurve.

Diese Beziehung behält auch noch ihre Gültigkeit für $a = 0$, d. h. für die speziellere Kurvenklasse:

$$p\,(\varkappa^2 - \tau^2) = 2\varkappa. \tag{28'}$$

Die allgemeine Kegelschnittgleichung (5) gibt eine Ellipse für $a_{33} > 0$, die für $a_{11}\delta$ oder $a_{22}\delta < 0$ reell, für $a_{11}\delta$ oder $a_{22}\delta > 0$ imaginär ist. Bezeichnet man mit β_{ik} die adjungierten Unterdeterminanten zu den Elementen a_{ik} in der Determinante:

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

so hat die Kurvenklasse (6) als Bildkurve eine Ellipse, da $\delta \cdot a_{ik} = \beta_{ik}$ ist, wenn:

$$\beta_{11}\,\beta_{22} - \beta_{12}^2 > 0$$

ist. Die Ellipse ist reell für:

$$\beta_{11} \text{ oder } \beta_{22} < 0, \text{ imaginär für: } \beta_{11} \text{ oder } \beta_{22} > 0.$$

Die Kurvenklasse (6) hat als *Mannheim*sche Bildkurve einen Kreis für:

$$\beta_{11} = \beta_{22};\ \beta_{12} = 0,$$

und eine Hyperbel für:

$$\beta_{11}\,\beta_{22} - \beta_{12}^2 < 0.$$

Mit $\delta = 0$, d. h. dem Zerfall der Kegelschnittgleichung, wird auch $\varepsilon = 0$. Die allgemeine quadratische Beziehung zwischen den beiden Krümmungen zerfällt in zwei lineare, also in ein Paar von *Bertrand*schen Kurven bzw. Schraubenlinien.

Es lassen sich hier, wie natürlich auch für Kurven höheren Grades, geometrische Eigenschaften der ebenen Bildkurve auf Klassen von Raumkurven übertragen.

In der Darstellung der Kurvenklassen (6) durch Kegelschnitte läßt sich auch leicht die Lage der folgenden Kurven auf der Hauptnormalenfläche zur Grundkurve überschauen: der Krümmungsmittelpunktskurve, der Striktionslinie, der Kurve, längs deren die beiden Hauptkrümmungsradien entgegengesetzt gleich sind.

Den Tangenten vom Nullpunkt an die Bildkurve entsprechen die Punkte, für die $\varkappa = \infty$, $\tau = \infty$ ist, also die singulären Punkte, deren es zwei (ev. imaginäre) gibt.

Im allgemeinen hat die Ellipse zwei, die Parabel eine, die Hyperbel zwei oder keine Tangente parallel zur Y- bzw. X-Achse. Dementsprechend haben die zugehörigen Kurvenklassen Punkte, für die $\varkappa = 0$ bzw. $\tau = 0$ wird.

Die Striktionslinie der Hauptnormalenfläche wird dargestellt durch die Fußpunktskurve zur *Mannheim*schen Bildkurve, bezogen auf den Koordinatenanfang als Pol. Ihre Ordinaten geben den Verlauf der Striktionslinie bezüglich der Grundkurve. Ein Schneiden der X-Achse entspricht also einem Schneiden der Grundkurve.

Die Kurve, längs deren die Hauptkrümmungsradien entgegengesetzt gleich sind, wird durch die *Mannheim*sche Bildkurve selbst dargestellt. Für die Ellipse bleibt sie ganz im Endlichen, für die Parabel hat sie einen, für die Hyperbel zwei unendlich ferne Punkte. Sie schneidet die Grundkurve in höchstens zwei Punkten. Berührt der Kegelschnitt die X-Achse, so berührt diese Kurve entsprechend die Grundkurve; dafür ist stets $\varkappa = \infty$; in demselben Punkte kreuzt aber auch die Striktionslinie die Grundkurve. Denn die Ordinaten der Fußpunktskurve werden nur für die Tangenten, die durch Nullpunkt gehen, zu Null. Die Striktionslinie kreuzt also ebenfalls höchstens zweimal die Grundkurve.

Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen.

Von *A. Plessner* in Gießen.

Das folgende soll einen Beitrag liefern zu der viel behandelten Frage, wie man aus der Größenordnung der Koeffizienten a_n, b_n einer trigonometrischen Reihe

$$\Sigma(a_n \cos n\,\theta + b_n \sin n\,\theta) \tag{1}$$

auf das Maß ihrer Konvergenzmenge schließen kann. Das erste nicht triviale Ergebnis in dieser Richtung erzielte *Fatou* [1]), der unter der Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} n\,(|a_n| + |b_n|) = 0$ bewiesen hat, daß die Divergenzpunkte von (1) eine Nullmenge bilden, oder anders ausgedrückt, daß dann die Reihe (1) fast überall konvergiert. Eine Verschärfung dieses Resultates brachten die Arbeiten von *Jerosch* und *Weyl* [2]), auf Grund einer ganz anderen Methode, die auch bei Reihen, die nach allgemeinen Orthogonalfunktionen fortschreiten, anwendbar bleibt. Die letztgenannte Arbeit von *Weyl* wurde dann der Ausgangspunkt für eine ganze Reihe von Arbeiten, bei denen allgemeine Orthogonalfunktionen zugrunde gelegt wurden. Inzwischen haben *W. H. Young* [3]) und *Hardy* [4]) für trigonometrische Reihen sehr weitgehende Resultate gefunden mit Hilfe von Methoden, die mehr auf den Fall der trigonometrischen Reihen zugeschnitten sind. Insbesondere bewies *Hardy* [4]) auf sehr einfache Weise einen Satz über allgemeine *Fourier*reihen, der auf die *Fourier*reihen von Funktionen, die samt ihrem Quadrate integrierbar sind, angewandt, ergibt, daß schon die Konvergenz von

$$\Sigma(a_n^2 + b_n^2)\,(\lg n)^2 \tag{2}$$

genügt, um zu schließen, daß die Reihe (1) fast überall konvergiert. Ein weitergehendes Resultat erzielten *Kolmogoroff* und *Seliverstoff* [5]), indem sie auf die

[1]) *P. Fatou*, Séries trigonometriques et séries de Taylor. Acta Mathem. 30 (1906), S. 335.

[2]) *F. Jerosch* und *H. Weyl*, Über die Konvergenz von Reihen die nach periodischen Funktionen fortschreiten. Math. Ann. 66 (1909), S. 67. *H. Weyl*, Über Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten. Math. Ann. 67 (1909), S. 225.

[3]) *W. H. Young*, Sur les series de Fourier convergentes presque partout. Comptes Rendus 155 (1912), S. 1480.

[4]) *G. H. Hardy*, On the summability of Fouriers series. Proceedings of the Lond. math. Soc. (2) 12 (1913), S. 365.

[5]) *A. Kolmogoroff* und *G. Seliverstoff*, Sur la convergence des séries de Fourier. Comptes Rendus 178 (1924), S. 303.

*Jerosch-Weyl*sche Methode zurückgriffen. Sie beweisen nämlich, daß (2) ersetzt werden kann durch die Konvergenz der beiden Reihen:

$$\Sigma (a_n^2 + b_n^2)\, \mu(n), \qquad \Sigma \frac{1}{n\,\mu(n)},$$

wo $\mu(n) < \mu(n+1)$. Hiernach kann der Faktor $\mu(n) = (\lg n)^2$ durch $(\lg n)^{1+\delta}$ $(\delta > 0)$ ersetzt werden, während für $\mu(n) = \lg n$ die zweite Reihe divergiert. Das Hauptergebnis dieser Arbeit besteht in dem Nachweis, daß in der Aussage des *Hardy*schen Satzes $(\lg n)^2$ durch $\lg n$ ersetzt werden kann. Wie die letztgenannte Arbeit, knüpft auch die vorliegende an die oben zitierte Arbeit von *Weyl* an.

§ 1.

Wir beweisen zunächst einen allgemeinen Satz über Konvergenz von Folgen integrierbarer[1]) Funktionen. Wir setzen ganz allgemein voraus, die Funktionenfolge $f_1, f_2 \ldots$ sei definiert auf einer meßbaren[1]) Menge A (von positivem, endlichem Maß) eines p-dimensionalen Raumes, dessen Punkte wir mit X bezeichnen; außerdem sollen die $f_\varkappa$ über A integrierbar sein. Wir setzen[2]):

$$\begin{aligned} \Phi_{mn} &= \max.\,(f_m - f_n,\ f_{m+1} - f_m,\ \ldots\ f_n - f_m) \\ \varphi_{mn} &= \min.\,(f_m - f_m,\ f_{m+1} - f_m,\ \ldots\ f_n - f_m) \end{aligned} \qquad (n > m)$$

$$J_{mn} = \int_A \Phi_{mn}\, dX \qquad j_{mn} = \int_A \varphi_{mn}\, dx\,.$$

Da die Φ_{mn} bzw. φ_{mn} eine mit n aufsteigende bzw. absteigende Folge bilden, so gilt dasselbe von J_{mn} bzw. j_{mn}. Es existieren somit

$$J_m = \lim_{n\to\infty} J_{mn}\,, \qquad j_m = \lim_{n\to\infty} j_{mn}\,.$$

Der zu beweisende Satz lautet dann:

Hilfssatz[3]): Ist

$$\lim_{m\to\infty} J_m = \lim_{m\to\infty} j_m = 0\,, \tag{3}$$

so konvergiert die Funktionenfolge $f_1, f_2 \ldots f_n \ldots$ fast überall (mit Ausnahme einer Nullmenge) auf A gegen endliche Grenzwerte.

Beweis: Wir wählen

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \ldots,$$

so daß

$$\varepsilon_\varkappa > 0 \qquad \lim \varepsilon_\varkappa = 0,$$

und $\delta_1, \delta_2, \ldots$, so daß $\delta_\varkappa > 0$, die Reihe $\delta_1 + \delta_2 + \cdots$ konvergiert und

$$\vartheta = \sum_{\varkappa=1}^{\infty} \delta_\varkappa\,.$$

---

[1]) „Integrierbar" und „meßbar" sind in der vorliegenden Arbeit stets im Lebesgueschen Sinne gemeint.

[2]) Unter $\max(f_1, f_2 \ldots f_n)$ bzw. $\min(f_1, f_2 \ldots f_n)$ verstehen wir die Funktion, die in jedem Punkte X als die größte bzw. kleinste Zahl unter den Funktionswerten $f_1(X), f_2(X) \ldots, f_n(X)$ definiert ist.

[3]) Vgl. hierzu *H. Weyl* loc. cit. §§ 2. 3.

Aus (3) folgt die Existenz eines $\nu_\varkappa$, so daß für alle $m \geqq \nu_\varkappa$

$$0 \leqq J_m < \varepsilon_\varkappa \delta_\varkappa , \qquad 0 \geqq j_m > -\varepsilon_\varkappa \delta_\varkappa$$

und um so mehr:

$$0 \leqq J_{mn} < \varepsilon_\varkappa \delta_\varkappa , \qquad 0 \geqq j_{mn} > -\varepsilon_\varkappa \delta_\varkappa \qquad (n > m \geqq \nu_\varkappa) .$$

Es sei außerdem[1])

$$B_{\varkappa n} = A\,(\Phi_{\nu_\varkappa n} \geqq \varepsilon_\varkappa) \qquad C_{\varkappa n} = A\,(\varphi_{\nu_\varkappa n} \leqq -\varepsilon_\varkappa) \qquad (n > \nu_\varkappa)$$

und

$$B_\varkappa = B_{\varkappa\varkappa+1} + B_{\varkappa\varkappa+2} + \cdots \qquad C_\varkappa = C_{\varkappa\varkappa+1} + C_{\varkappa\varkappa+2} + \cdots .$$

In der Menge $(A - B_\varkappa)\,(A - C_\varkappa)$ ist daher für jedes $n > \nu_\varkappa$ und gleichmäßig für alle Punkte der Menge:

$$\Phi_{\nu_\varkappa n} < \varepsilon_\varkappa , \qquad \varphi_{\nu_\varkappa n} > -\varepsilon_\varkappa ,$$

also auch

$$-\varepsilon_\varkappa < f_n - f_{\nu_\varkappa} < \varepsilon_\varkappa .$$

Nun ist:

$$\varepsilon_\varkappa m B_{\varkappa n} \leqq J_{\nu_\varkappa n} < \varepsilon_\varkappa \delta_\varkappa , \qquad -\varepsilon_\varkappa m C_{\varkappa n} \geqq j_{\nu_\varkappa n} > -\varepsilon_\varkappa \delta_\varkappa ,$$

also

$$(4) \qquad m B_{\varkappa n} < \delta_\varkappa , \qquad m C_{\varkappa n} < \delta_\varkappa .$$

Andererseits ist aber

$$B_{\varkappa\,\varkappa+1} < B_{\varkappa\,\varkappa+2} < \ldots , \qquad C_{\varkappa\,\varkappa+1} < C_{\varkappa\,\varkappa+2} < \ldots ,$$

folglich ist

$$m B_\varkappa = \lim_{n\to\infty} m B_{\varkappa n} , \qquad m C_\varkappa = \lim_{n\to\infty} m C_{\varkappa n} .$$

Aus (4) folgt dann

$$(4') \qquad m B_\varkappa \leqq \delta_\varkappa , \qquad m C_\varkappa \leqq \delta_\varkappa$$

und aus (4'), wenn man setzt

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + \cdots , \qquad C = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots .$$

$$(4'') \qquad m B \leqq \delta , \qquad m C \leqq \delta .$$

In der Menge $A^* = (A - B)\,(A - C)$ gilt dann folgendes: Zu jedem ε läßt sich ein ν so finden, daß für $n > \nu$

$$-\varepsilon < f_n - f_\nu < \varepsilon$$

gleichmäßig für alle Punkte von A^*. Ist nämlich $\varepsilon_\varkappa \leqq \varepsilon$, so ist schon nach dem vorherigen sogar in $(A - B_\varkappa)\,(A - C_\varkappa) > A^*$

$$-\varepsilon \leqq -\varepsilon_\varkappa < f_n - f_{\nu_\varkappa} < \varepsilon_\varkappa \leqq \varepsilon ,$$

so daß $\nu = \nu_\varkappa$ gewählt werden kann. Damit ist aber gezeigt, daß die Folge $f_1, f_2, \ldots$ in A^* gleichmäßig (gegen endliche Grenzwerte) konvergiert. Nun wird sich, wie aus (4'') folgt, wenn δ genügend klein gewählt wird, $m A^*$ beliebig wenig von $m A$ unterscheiden, woraus die Behauptung des Hilfssatzes unmittelbar folgt.

---

[1]) Unter $A(f \geqq \alpha)$, $A(f \geqq \varphi)$ verstehen wir wie üblich die Menge der Punkte von A, in denen die betreffenden Ungleichungen gelten.

§ 2.

Es sei

$$(1) \qquad \sum_{\varkappa=2}^{\infty}(a_\varkappa \cos \varkappa\theta + b_\varkappa \sin \varkappa\theta)$$

eine trigonometrische Reihe und

$$s_1(\theta) = 0\,, \quad \ldots \quad s_n(\theta) = \sum_{\varkappa=2}^{n}(a_\varkappa \cos \varkappa\theta + b_\varkappa \sin \varkappa\theta)$$

seien ihre Partialsummen.

Wir werden den Hilfssatz zur Anwendung bringen, und zwar wird hier für A das Intervall $(0, 2\pi)$ und für f_n $s_n(\theta)$ zu setzen sein. Es sind dann in der Bezeichnung des § 1 die Integrale J_{mn} und j_{mn} abzuschätzen. Wir weisen nach, daß

$$(5) \qquad \begin{aligned} 0 \leqq J_{mn} &= \int_0^{2\pi} \Phi_{mn}\, d\theta \leqq K\sqrt{\sum_{\varkappa=m+1}^{n}(a_\varkappa^2 + b_\varkappa^2)\lg \varkappa} \\ 0 \geqq j_{mn} &= \int_0^{2\pi} \varphi_{mn}\, d\theta \geqq -K\sqrt{\sum_{\varkappa=m+1}^{n}(a_\varkappa^2 + b_\varkappa^2)\lg \varkappa}\,, \end{aligned}$$

wo K eine absolute Konstante bedeutet.

Es genügt, die erste dieser Ungleichungen zu beweisen. Wir setzen zunächst $m = 1$ voraus und betrachten

$$\Phi_{1n} = \max\,(0, s_2, s_3 \ldots s_n)\,;$$

indem wir $a_1 = b_1 = 0$ setzen, können wir das auch in der Form schreiben:

$$\Phi_{1n} = \sum_{\varkappa=1}^{\lambda(\theta)}(a_\varkappa \cos \varkappa\theta + b_\varkappa \sin \varkappa\theta)\,,$$

wo die Funktion $\lambda(\theta)$ nur die ganzzahligen Werte $1, 2, \ldots n$ annehmen kann. Außerdem sei gesetzt:

$$X_n(\theta) = \sum_{\varkappa=2}^{n}(a_\varkappa \cos \varkappa\theta + b_\varkappa \sin \varkappa\theta)\sqrt{\lg \varkappa}\,,$$

so daß

$$a_\varkappa = \frac{1}{\pi\sqrt{\lg \varkappa}}\int_0^{2\pi} X_n(t) \cos \varkappa t\,, \qquad b_\varkappa = \frac{1}{\pi\sqrt{\lg \varkappa}}\int_0^{2\pi} X_n(t) \sin \varkappa t\, dt \qquad (\varkappa \geqq 2)$$

$$\Phi_{1n} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \sum_{\varkappa=2}^{\lambda(\theta)} \frac{\cos \varkappa\,(\theta - t)}{\sqrt{\lg \varkappa}}\, X_n(t)\, dt$$

$$J_{1n} = \int_0^{2\pi} \Phi_{1n}\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} \sum_{\varkappa=2}^{\lambda(\theta)} \frac{\cos \varkappa\,(\theta - t)}{\sqrt{\lg \varkappa}}\, d\theta\right] X_n(t)\, dt$$

(in den beiden letzten Formeln ist für $\lambda(\theta) = 1$ die $\sum_{\varkappa=2}^{\lambda(\theta)} \frac{\cos \varkappa\,(\theta - t)}{\sqrt{\lg \varkappa}} = 0$ zu setzen).

Die Anwendung der *Schwarz*schen Ungleichung ergibt dann:

$$(6) \qquad J_{1n}^2 \leqq \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} \sum_{\varkappa=2}^{\lambda(\theta)} \frac{\cos \varkappa\,(\theta - t)}{\sqrt{\lg \varkappa}}\, d\theta\right]^2 dt \cdot \int_0^{2\pi} X_n^2\, dt = L\sum_{\varkappa=2}^{n}(a_\varkappa^2 + b_\varkappa^2)\lg \varkappa\,,$$

wo $L = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} \sum_{\varkappa=2}^{\lambda(\theta)} \frac{\cos \varkappa\,(\theta - t)}{\sqrt{\lg \varkappa}}\, d\theta\right]^2 dt$ gesetzt wurde.

Wir werden zeigen, daß $L \leqq K^2$, wo K eine absolute Konstante ist, womit die Ungleichungen (5) für $m = 1$ bewiesen sein werden. Es ist

$$L = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\sum_{\varkappa=2}^{\lambda(\theta)}\frac{\cos\varkappa(\theta-t)}{\sqrt{\lg\varkappa}}\,d\theta\int\sum_{\varkappa=2}^{\lambda(\theta')}\frac{\cos\varkappa(\theta'-t)}{\sqrt{\lg\varkappa}}\,d\theta'\right]dt$$

$$(7)\qquad = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\left[\sum_{\varkappa=2}^{\lambda(\theta)}\frac{\cos\varkappa(\theta-t)}{\sqrt{\lg\varkappa}}\cdot\sum_{\varkappa=2}^{\lambda(\theta')}\frac{\cos\varkappa(\theta'-t)}{\sqrt{\lg\varkappa}}\right]dt\right\}d\theta\,d\theta'$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\varkappa=2}^{\lambda(\theta,\theta')}\frac{\cos\varkappa(\theta-\theta')}{\lg\varkappa}\,d\theta\,d\theta',$$

wo $\lambda(\theta,\theta') = \min(\lambda(\theta),\ \lambda(\theta'))$ gesetzt wurde.

Setzen wir

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}, \qquad \sigma_m = \frac{1}{2} + \sum_{\varkappa=2}^{m}\cos\varkappa(\theta-\theta') = \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)(\theta-\theta')}{2\sin\frac{\theta-\theta'}{2}}$$

$$\sigma_\lambda = \frac{1}{2} + \sum_{\varkappa=1}^{\lambda(\theta,\theta')}\cos\varkappa(\theta-\theta') = \frac{\sin\left(\lambda(\theta,\theta')+\frac{1}{2}\right)(\theta-\theta')}{2\sin\frac{\theta-\theta'}{2}}$$

$$\tau_m = \sum_{\varkappa=0}^{m}\sigma_\varkappa = \frac{\sin^2(m+1)\frac{(\theta-\theta')}{2}}{2\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}}, \qquad \tau_{\lambda-1} = \sum_{\varkappa=0}^{\lambda(\theta,\theta')-1}\sigma_\varkappa = \frac{\sin^2\lambda(\theta,\theta')\frac{(\theta-\theta')}{2}}{2\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}},$$

so folgt:

$$\sum_{\varkappa=2}^{\lambda(\theta,\theta')}\frac{\cos\varkappa(\theta-\theta')}{\lg\varkappa} = \sum_{\varkappa=2}^{\lambda}\frac{\sigma_\varkappa-\sigma_{\varkappa-1}}{\lg\varkappa} = \sum_{\varkappa=2}^{\lambda-1}\left(\frac{1}{\lg\varkappa}-\frac{1}{\lg(\varkappa+1)}\right)\sigma_\varkappa + \frac{\sigma_\lambda}{\lg\lambda(\theta,\theta')} - \frac{\sigma_1}{\lg 2}$$

$$= \sum_{\varkappa=2}^{\lambda-2}\left(\frac{1}{\lg\varkappa}-\frac{2}{\lg(\varkappa+1)}+\frac{1}{\lg(\varkappa+2)}\right)\tau_\varkappa + \left(\frac{1}{\lg(\lambda-1)}-\frac{1}{\lg\lambda}\right)\tau_{\lambda-1} - \left(\frac{1}{\lg 2}-\frac{1}{\lg 3}\right)\tau_1$$

$$+\frac{\sigma_\lambda}{\lg\lambda}-\frac{\sigma_1}{\lg 2}$$

(für $\lambda = 2$ treten nur die beiden letzten Glieder auf).

Aus (7) folgt dann, wenn wir noch negative Bestandteile weglassen,

$$0 \leqq L \leqq \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\varkappa=2}^{\lambda-2}\left(\frac{1}{\lg\varkappa}-\frac{2}{\lg(\varkappa+1)}+\frac{1}{\lg(\varkappa+2)}\right)\tau_\varkappa\,d\theta\,d\theta'$$

$$(8)\qquad +\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\lg(\lambda-1)}-\frac{1}{\lg\lambda}\right)\tau_{\lambda-1}\,d\theta\,d\theta' + \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sigma_\lambda}{\lg\lambda}\,d\theta\,d\theta'$$

$$= L_1 + L_2 + L_3.$$

In L_1 ist

$$\left(\frac{1}{\lg\varkappa}-\frac{2}{\lg(\varkappa+1)}+\frac{1}{\lg(\varkappa+2)}\right) \leqq \frac{1}{\varkappa^2(\lg\varkappa)^2}+\frac{2}{\varkappa^2(\lg\varkappa)^3} \leqq \left(1+\frac{2}{\lg 2}\right)\frac{1}{\varkappa^2(\lg\varkappa)^2}$$

und somit

$$0 \leqq L_1 \leqq \Big(1+\frac{2}{\lg 2}\Big)\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\varkappa=2}^{\lambda-2}\frac{\tau_\varkappa}{\varkappa^2(\lg\varkappa)^2}\,d\theta\,d\theta'$$

$$\leqq\Big(1+\frac{2}{\lg 2}\Big)\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\varkappa=2}^{n-2}\frac{\tau_\varkappa}{\varkappa^2(\lg\varkappa)^2}\,d\theta\,d\theta'$$

(9)
$$=\Big(1+\frac{2}{\lg 2}\Big)\sum_{\varkappa=2}^{n-2}\frac{1}{\varkappa^2(\lg\varkappa)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\tau_\varkappa\,d\theta\,d\theta' = 2\pi^2\Big(1+\frac{2}{\lg 2}\Big)\sum_{\varkappa=2}^{n-2}\frac{\varkappa+1}{\varkappa^2(\lg\varkappa)^2}$$

$$<4\pi^2\Big(1+\frac{2}{\lg 2}\Big)\sum_{\varkappa=2}^{\infty}\frac{1}{\varkappa(\lg\varkappa)^2}.$$

Um L_2 und L_3 abzuschätzen, bedürfen wir des folgenden Lemmas.

Lemma. Wenn $F(\theta, \theta', t) = F(\theta', \theta, t)$, so ist:

(10)
$$\Big|\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta,\theta',\lambda(\theta,\theta'))\,d\theta\,d\theta'\Big| \leqq 2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\pi}|F(\theta,\theta',\lambda(\theta))|\,d\theta'.$$

Es sei Q das Quadrat

$$0 \leqq \theta \leqq 2\pi, \qquad 0 \leqq \theta' \leqq 2\pi$$

$$Q_1 = Q\,(\lambda(\theta) \leqq \lambda(\theta')), \qquad Q_2 = Q\,(\lambda(\theta) > \lambda(\theta'))\,[1].$$

Dann ist

$$\text{in } Q_1\text{:}\quad \lambda(\theta,\theta') = \lambda(\theta), \qquad \text{in } Q_2\text{:}\quad \lambda(\theta,\theta') = \lambda(\theta')$$

und

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

Also folgt

$$\iint_Q F(\theta,\theta',\lambda(\theta,\theta'))\,d\theta\,d\theta' = \iint_{Q_1} F(\theta,\theta',\lambda(\theta))\,d\theta\,d\theta' + \iint_{Q_2} F(\theta,\theta',\lambda(\theta'))\,d\theta d\theta'$$

$$\Big|\iint_Q F(\theta,\theta',\lambda(\theta,\theta'))\,d\theta d\theta'\Big| \leqq \iint_Q |F(\theta,\theta',\lambda(\theta))|\,d\theta\,d\theta' + \iint_Q |F(\theta,\theta',\lambda(\theta'))|\,d\theta d\theta'$$

$$= 2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\pi}|F(\theta,\theta',\lambda(\theta))|\,d\theta',$$

womit das Lemma bewiesen ist.

In L_2 ist

$$\frac{1}{\lg(\lambda-1)} - \frac{1}{\lg\lambda} \leqq \frac{1}{(\lambda-1)[\lg(\lambda-1)]^2} \leqq \frac{1}{(\lg 2)^2(\lambda-1)},$$

da man nach der vorhin gemachten Bemerkung in L_2 $\lambda \geqq 3$ voraussetzen darf. Die Anwendung des Lemmas (10) ergibt dann:

$$0 \leqq L_2 \leqq \frac{1}{(\lg 2)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\tau_{\lambda-1}\,d\theta\,d\theta'}{\lambda(\theta,\theta')-1}$$

(11)
$$\leqq \frac{2}{(\lg 2)^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\lambda(\theta)-1}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\lambda(\theta)\dfrac{\theta-\theta'}{2}}{2\sin^2\dfrac{\theta-\theta'}{2}}\,d\theta' = \frac{2\pi}{(\lg 2)^2}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda(\theta)\,d\theta}{\lambda(\theta)-1} \leqq \frac{6\pi^2}{(\lg 2)^2}.$$

[1]) Siehe Anmerkung 1, S. 17.

Auf L_3 wenden wir wieder das Lemma an:

$$|L_3| \leqq 2\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\lg \lambda(\theta)} \int_0^{2\pi} \frac{\left|\sin\left(\lambda(\theta)+\frac{1}{2}\right)(\theta-\theta')\right|}{2\left|\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\right|}\, d\theta'$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\lg \lambda(\theta)} \int_0^{2\pi} \frac{\left|\sin\left(\lambda(\theta)+\frac{1}{2}\right)\theta'\right|}{2\sin\frac{\theta'}{2}}\, d\theta' .$$

Nun ist:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\left|\sin\left(\lambda(\theta)+\frac{1}{2}\right)\theta'\right|}{2\sin\frac{\theta'}{2}}\, d\theta' = \int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\lambda(\theta)+\frac{1}{2}\right)\theta'\right|}{\sin\frac{\theta'}{2}}\, d\theta'$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\lambda(\theta)}} + \int_{\frac{1}{\lambda(\theta)}}^{\pi} \leqq \frac{2\lambda(\theta)+1}{\lambda(\theta)} + \pi\int_{\frac{1}{\lambda(\theta)}}^{\pi} \frac{d\theta'}{\theta'} < \frac{5}{2} + \pi \lg \lambda(\theta) < 3\pi \lg \lambda(\theta),$$

also

$$|L_3| < 6\pi\int_0^{2\pi} d\theta = 12\pi^2. \tag{12}$$

Aus (6), (8), (9), (11) und (12) folgt somit, wenn K eine absolute Konstante bedeutet,

$$|J_{1n}| < K\sqrt{\sum_{\varkappa=2}^{n}(a_\varkappa^2+b_\varkappa^2)\lg\varkappa}\,.$$

Hieraus folgt auch leicht die Ungleichung (5) für beliebiges m. Denn

$$\Phi_{mn} = \max\,(s_m - s_m, s_{m+1} - s_m \ldots s_n - s_m)$$

kann auch als Φ_m definiert werden, wenn man

$$a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = \ldots a_m = b_m = 0$$

setzt. Also ist:

$$J_{mn} \leqq K\sqrt{\sum_{\varkappa=m+1}^{n}(a_\varkappa^2+b_\varkappa^2)\lg\varkappa} \tag{5_1}$$

und ebenso

$$j_{mn} \geqq -K\sqrt{\sum_{\varkappa=m+1}^{n}(a_\varkappa^2+b_\varkappa^2)\lg\varkappa}\,. \tag{5_2}$$

Setzt man die Konvergenz der Reihe

$$\Sigma\,(a_\varkappa^2+b_\varkappa^2)\lg\varkappa \tag{13}$$

voraus so folgt aus (5)

$$J_m \leqq K\sqrt{\sum_{\varkappa=m+1}^{\infty}(a_\varkappa^2+b_\varkappa^2)\lg\varkappa}$$

$$j_m \geqq -K\sqrt{\sum_{\varkappa=m+1}^{\infty}(a_\varkappa^2+b_\varkappa^2)\lg\varkappa}$$

und weiter

$$\lim_{m\to\infty} J_m = 0, \qquad \lim_{m\to\infty} j_m = 0, \tag{3}$$

so daß die Anwendung des Hilfssatzes des § 1 den Satz ergibt:

Satz I. Konvergiert die Reihe

$$\sum_{\varkappa=2}^{\infty}(a_\varkappa^2 + b_\varkappa^2)\lg\varkappa \tag{13}$$

so konvergiert die trigonometrische Reihe

$$\sum_{\varkappa=2}^{\infty}(a_\varkappa \cos\varkappa\theta + b_\varkappa \sin\varkappa\theta) \tag{1}$$

fast überall, d. h. für alle θ mit Ausnahme einer Nullmenge.

Unter Zuhilfenahme des *Fischer-Riesz*schen Satzes, kann man, wie unmittelbar ersichtlich, dem Satz 1 auch die folgende Formulierung geben:

Satz I'. Ist $f(\theta)$ eine samt ihrem Quadrate integrierbare Funktion und

$$f(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\varkappa=1}^{\infty} a_\varkappa \cos\varkappa\theta + \beta_\varkappa \sin\varkappa\theta \tag{14}$$

ihre Fourierreihe, so ist die Reihe:

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos\theta + \beta_1\sin\theta + \sum_{\varkappa=2}^{\infty}\frac{a_\varkappa\cos\varkappa\theta + \beta_\varkappa\sin\varkappa\theta}{\sqrt{\lg\varkappa}} \tag{15}$$

fast überall konvergent.

Bezeichnen wir mit $S_n(\theta)$ die n-te Partialsumme der Fourierreihe (14), d. h.

$$S_n(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\varkappa=1}^{n}(a_\varkappa\cos\varkappa\theta + \beta_\varkappa\sin\varkappa\theta),$$

so folgt aus einem Satz von *Kronecker* [1]), daß an jeder Konvergenzstelle der Reihe (15) die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(\theta)}{\sqrt{\lg n}} = 0 \tag{16}$$

gilt. In Verbindung mit Satz I' ergibt das:

Satz II. Bedeutet $S_n(\theta)$ die n-te Partialsumme der Fourierreihe einer samt ihrem Quadrate integrierbaren Funktion, so gilt fast überall die Gleichung (16).

§ 3.

Die trigonometrischen Reihen (1), bei denen die Reihe (13) konvergiert, und deren Konvergenz wir nachgewiesen haben, sind Fourierreihen einer Klasse von Funktionen, die samt ihrem Quadrate integrierbar sind. In diesem Abschnitt wollen wir gewisse Eigenschaften dieser Funktionsklasse angeben, insbesondere auch sie zu charakterisieren suchen, ohne Zuhilfenahme der Fourierkoeffizienten. Wir bezeichnen die Funktionen dieser Klasse mit $f(\theta)$ und setzen:

$$f(\theta) \sim \Sigma\,(a_\varkappa\cos\varkappa\theta + b_\varkappa\sin\varkappa\theta)$$

---

[1]) *L. Kronecker*, Quelques remarques sur la determination des valeurs moyennes. Comptes Rendus 103 (1886), S. 980.

$$\varphi(\theta, t) = f(\theta + t) - f(\theta - t)\,, \qquad \varphi(t) = \int_0^{2\pi} [\varphi(\theta, t)]^2\, d\theta$$

$$\psi(\theta, t) = f(\theta + t) + f(\theta - t) - 2\, f(\theta)\,, \qquad \psi(t) = \int_0^{2\pi} [\psi(\theta, t)]^2\, d\theta\,.$$

Dann gilt der folgende Äquivalenzsatz:

Satz III. Für die Funktionen $f(\theta)$ der von uns betrachteten Klasse sind die Funktionen $\frac{\varphi(t)}{t}$, $\frac{\psi(t)}{t}$ in $0 \leqq t \leqq 2\pi$ integrierbar, und umgekehrt, wenn für eine quadratisch integrierbare Funktion $f(\theta)$ eine von diesen Funktionen integrierbar ist, so gehört sie zu der von uns betrachteten Klasse, d. h. $\Sigma(a_\varkappa^2 + b_\varkappa^2) \lg \varkappa$ ist konvergent.

Wir erbringen den Beweis nur für die Funktion $\frac{\varphi(t)}{t}$, da er für $\frac{\psi(t)}{t}$ ganz analog verläuft.

Es ist

$$\varphi(\theta, t) \sim \sum_{\varkappa=1}^{\infty} 2\,(b_\varkappa \cos \varkappa\theta - a_\varkappa \sin \varkappa\theta) \sin \varkappa t$$

und nach dem *Parseval*schen Satze

$$\varphi(t) = \int_0^{2\pi} [\varphi(\theta, t)]^2\, dt = 4\pi \sum_{\varkappa=1}^{\infty} (a_\varkappa^2 + b_\varkappa^2) \sin^2 \varkappa t. \tag{17}$$

Es sei

$$\varphi_n(t) = 4\pi \sum_{\varkappa=1}^{n} (a_\varkappa^2 + b_\varkappa^2) \sin^2 \varkappa t\,.$$

Dann sind die $\frac{\varphi_n(t)}{t}$, wie man unmittelbar sieht, integrierbar, und es ist

$$\frac{\varphi_1(t)}{t} \leqq \frac{\varphi_2(t)}{t} \leqq \dots$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(t)}{t} = \frac{\varphi(t)}{t}\,.$$

Nach einem bekannten Satze ist $\frac{\varphi(t)}{t}$ dann und nur dann integrierbar wenn

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_n(t)}{t}\, dt$$

endlich ist. Nun ist aber

$$\int_0^{2\pi} \frac{\varphi_n(t)}{t}\, dt = 4\pi \sum_{\varkappa=1}^{n} (a_\varkappa^2 + b_\varkappa^2) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varkappa t}{t}\, dt\,.$$

Es ist aber leicht zu zeigen, daß $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varkappa t}{t}$ genau von der Ordnung $\lg \varkappa$ ist, d. h. $\lim_{n\to\infty} \int \frac{\varphi_n(t)}{t}\, dt$ ist dann und nur dann endlich, wenn $\Sigma(a_\varkappa^2 + b_\varkappa^2) \lg \varkappa$

konvergiert, woraus die Behauptung folgt. Aus der Existenz des Integrals von $\frac{\varphi(t)}{t}$ folgt wegen der Formel:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[\varphi(\theta,t)]^2}{t}\,dt$$

auch die Existenz des Doppelintegrals auf der rechten Seite und hieraus ergibt sich nach einem Satz von *Fubini* [1]):

Satz IV. Für die Funktionen $f(\theta)$ der von uns betrachteten Klasse existiert fast überall das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{[f(\theta+t)-f(\theta-t)]^2}{t}\,dt$$

und stellt eine integrierbare Funktion dar; dasselbe gilt vom Integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{[f(\theta+t)+f(\theta-t)-2f(\theta)]^2}{t}\,dt.$$

Über die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ wollen wir noch den folgenden Satz [2]) beweisen.

Satz V. Gehört $f(\theta)$ der von uns betrachteten Klasse an, so gelten die Beziehungen:

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \lg \frac{1}{t}\,\varphi(t) = 0, \qquad \lim_{t\to 0} \lg \frac{1}{t}\,\psi(t) = 0. \tag{18}$$

Beweis: Wir setzen

$$a_\varkappa = a_\varkappa \sqrt{\lg \varkappa}, \qquad \beta_\varkappa = b_\varkappa \sqrt{\lg \varkappa}; \tag{19}$$

dann ist die Reihe $\Sigma(a_\varkappa^2+\beta_\varkappa^2)$ konvergent, und man kann zu jedem ε ein ν so finden, daß

$$\varrho_\nu = \sum_{\varkappa=\nu+1}^{\infty}(a_\varkappa^2+\beta_\varkappa^2) < \varepsilon.$$

Nun ist nach (17) und (19)

$$\begin{aligned}\lg \frac{1}{t}\,\varphi(t) &= 4\pi \lg \frac{1}{t} \sum_{\varkappa=1}^{\infty}(a_\varkappa^2+\beta_\varkappa^2)\frac{\sin^2 \varkappa t}{\lg \varkappa} \\ &= 4\pi \lg \frac{1}{t} \sum_{1}^{\nu} + 4\pi \lg \frac{1}{t} \sum_{\nu+1}^{\left[\frac{1}{t}\right]} + 4\pi \lg \frac{1}{t} \sum_{\left[\frac{1}{t}\right]+1}^{\infty} = M_1 + M_2 + M_3.\end{aligned} \tag{20}$$

---

[1]) *G. Fubini*, Sugli integrali multipli. Rend. d. R. Acc, dei Lincei (5) 16, I. (1907).

[2]) Wie aus dem Beweise ersichtlich ist, kann man den Satz V folgendermaßen verallgemeinern: Ist für die Fourierreihe von $f(\theta)$ $\Sigma(a_\varkappa^2+b_\varkappa^2)\,\mu(\varkappa)$ konvergent und wächst $\mu(n)$ monoton ins unendliche, so daß noch $\frac{n^2}{\mu(n)}$ (bzw. $\frac{n^4}{\mu(n)}$, wenn man nur $\psi(t)$ betrachtet) von einer gewissen Stelle an monoton ins unendliche wächst, so gelten $\lim_{t\to 0} \mu\left(\frac{1}{t}\right)\varphi(t) = 0$, $\lim_{t\to 0} \mu\left(\frac{1}{t}\right)\psi(t) = 0$. Unter einschränkenderen Voraussetzungen für $\mu(n)$ lassen sich auch die Sätze III u. IV entsprechend verallgemeinern.

Es gibt dann zunächst ein δ_1, so daß für $t < \delta_1$

$$M_1 = 4\pi \lg \frac{1}{t} \sum_{1}^{\nu} < 4\pi\varepsilon \tag{21}$$

$$M_2 < 4\pi t^2 \lg \frac{1}{t} \sum_{\varkappa=\nu+1}^{\left[\frac{1}{t}\right]} (\alpha_\varkappa^2 + \beta_\varkappa^2) \frac{\varkappa^2}{\lg \varkappa} = 4\pi t^2 \lg \frac{1}{t} \cdot M_4.$$

In M_4 führen wir partielle Summation aus:

$$M_4 = \sum_{\nu+1}^{\left[\frac{1}{t}\right]} (\alpha_\varkappa^2 + \beta_\varkappa^2) \frac{\varkappa^2}{\lg \varkappa} = \sum_{\varkappa=\nu+1}^{\left[\frac{1}{t}\right]} \frac{(\varrho_{\varkappa-1} - \varrho_\varkappa)\varkappa^2}{\lg \varkappa}$$

$$= \frac{\varrho_\nu (\nu+1)^2}{\lg(\nu+1)} + \sum_{\varkappa=\nu+1}^{\left[\frac{1}{t}\right]-1} \left(\frac{(\varkappa+1)^2}{\lg(\varkappa+1)} - \frac{\varkappa^2}{\lg \varkappa} \right) \varrho_\varkappa - \frac{\varrho_{\left[\frac{1}{t}\right]} \left[\frac{1}{t}\right]^2}{\lg\left[\frac{1}{t}\right]} \leqq \frac{2\varepsilon \left[\frac{1}{t}\right]^2}{\lg\left[\frac{1}{t}\right]},$$

wo $\left[\frac{1}{t}\right]$ die größte ganze Zahl, die in $\frac{1}{t}$ enthalten ist, bedeutet; dann ist

$$M_2 < 4\pi t^2 \lg \frac{1}{t} \cdot \frac{2\varepsilon \left[\frac{1}{t}\right]^2}{\lg\left[\frac{1}{t}\right]} \leqq 8\pi\varepsilon \tag{22}$$

also mit ε beliebig klein.

$$M_3 < 4\pi \lg \frac{1}{t} \sum_{\left[\frac{1}{t}\right]+1}^{\infty} \frac{\alpha_\varkappa^2 + \beta_\varkappa^2}{\lg \varkappa} < \frac{4\pi \lg \frac{1}{t} \cdot \varrho_{\left[\frac{1}{t}\right]}}{\lg\left(\left[\frac{1}{t}\right]+1\right)} < 4\pi\varepsilon\,. \tag{23}$$

Mit (20), (21), (22) und (23) ist die erste der Beziehungen (18) bewiesen. Für die zweite verläuft der Beweis ganz analog.

Von der Umkehrung eines einzelnen *Abel*schen Integrals.

Von *Bernhard von Ludwig* in Berlin.

Es ist bisher noch nicht gelungen, das vollständige System der voneinander unabhängigen, notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu bestimmen, unter denen der allgemeine Ansatz

$$(I) \qquad v_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{n} \int_{(c_\varkappa, d_\varkappa)}^{(x_\varkappa, y_\varkappa)} R_\lambda(x, y)\, dx \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

im bekannten Sinne eindeutig umkehrbar wird, wenn die Anzahl n der von einander linear unabhängigen rationalen Funktionen $R_\lambda(x, y)$ von x und von der algebraischen Funktion y von x beliebig ist. So hat z. B. die Frage noch keine Beantwortung gefunden, ob, wenn p das Geschlecht der betreffenden *Riemann*schen Fläche bedeutet, unter den $R_\lambda(x, y)$ die sämtlichen p linear unabhängigen Integranden 1. Gattung, sei es explicite, sei es implicite (d. h. linear und homogen durch die $R_\lambda(x, y)$ ausdrückbar) vorkommen müssen. In früheren Arbeiten habe ich diverse Beiträge zur Aufstellung der genannten Bedingungen geliefert und unter anderem gezeigt, daß der obige Ansatz nur dann eindeutig umkehrbar sein kann, wenn $n = p$, oder wenn $b + p - 1 \geqq n \geqq \frac{b}{2} + p$ ist, je nachdem das „Polygon“ $\mathfrak{B}$, zu welchem die Integranden R_λ „gehören“, einen Grad $b = 0$, oder $b \neq 0$ besitzt, und daß andererseits diese eindeutige Umkehrbarkeit auch immer wirklich besteht, wenn n seinen Maximalwert $b + p - 1$ (resp. p) hat [1]) (Math. Ann. 77 (1916), S. 369 und J. f. Math. 154 (1924), S. 50 ff.). Ist nun aber auch hieraus zu schließen, daß n in den Fällen $b = 0, 2, 3$ bzw. die Werte $p, p + 1, p + 2$ haben, also die R_λ nach dem *Riemann-Roch*schen Satze ein *vollständiges* System linear unabhängiger Integranden bilden müssen, die zum Polygon $\mathfrak{B}$ „gehören“, so ist eben nur für die drei niedrigsten Werte von b (der Wert $b = 1$ bleibt bekanntlich ausgeschlossen)

[1]) Daß die letzgenannte *hinreichende* Bedingung der eindeutigen Umkehrbarkeit durchaus *keine notwendige* ist, wird allein schon durch das sogenannte erweiterte Umkehrproblem von *Clebsch* und *Gordan* bewiesen, welches eindeutig lösbar ist, obwohl hier n, anstatt gleich $b + p - 1$ zu sein, nur den Wert $\frac{b}{2} + p$ besitzt.

das Auftreten der *sämtlichen* p Integranden 1. Gattung als ein notwendiges hiermit dargetan; daß aber die gleiche Notwendigkeit auch für andere Werte von b besteht, dafür ist ein Beweis bisher noch nicht bekannt geworden.

Mit den allereinfachsten Mitteln dagegen, (zu denen z. B. die sonst meist verwendete konforme Abbildung der *Riemann*schen Fläche durch *Abel*sche Integrale doch gewiß nicht zu zählen ist!), läßt sich der Fall $n = 1$, mit dem wir uns hier hauptsächlich beschäftigen wollen, völlig erschöpfend behandeln:

Wir nehmen also an, es sei ein einzelnes *Abel*sches Integral durch die Gleichung

$$(II) \qquad v = \int_{(c,d)}^{(x,y)} R(x, y)\, dx$$

definiert, wobei (c, d) eine fest gegebene, (x, y) eine variable Stelle der für y als einer algebraischen Funktion von x konstruierten *Riemann*schen Fläche bedeuten, und fragen, unter welchen Bedingungen diese Gleichung eindeutig umkehrbar wird, derart, daß durch jeden nicht singulären Wert von v eine und nur eine Stelle (x, y) als obere Integrationsgrenze bei passender Wahl des Integrationsweges bestimmt wird, indem sich hierbei x und y als eindeutige Funktionen der unabhängigen Variablen v ergeben.

Bekanntlich kann man in der Terminologie von *Dedekind* und *Weber* die rationale Funktion $R(x, y)$ von x und y als Quotient von „Polygonen", d. h. von Aggregaten mehrerer Stellen der *Riemann*schen Fläche symbolisch in der Form $R = \frac{\mathfrak{O} \cdot \mathfrak{P}}{\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{P}}$ darstellen, wenn $\mathfrak{O}$ als „Obereck" von $R = R(x, y)$ das System aller Nullstellen von R und $\mathfrak{U}$ als „Untereck" von R das System aller Unendlichkeitsstellen von R in der Weise bilden, daß die betreffenden Stellen genau so oft in $\mathfrak{O}$ resp. $\mathfrak{U}$ enthalten sind, wie die Ordnungszahlen des Null- oder Unendlichwerdens von R an diesen Stellen angeben, und wenn $\mathfrak{P}$ ein beliebiges Polygon bedeutet. Der Sinn der symbolischen Gleichung ist dann der, daß die Ordnungszahl der Entwicklung von R an einer beliebigen Stelle (x, y) übereinstimmen muß mit der Differenz $m - n$, falls (x, y) in dem als Komplex von $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{P}$ gebildeten Polygon $\mathfrak{O} \cdot \mathfrak{P}$ genau m-mal und in dem analog gebildeten Polygon $\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{P}$ genau n-mal enthalten ist. Offenbar läßt sich durch geeignete Wahl von $\mathfrak{P}$ die Gleichung für R auch auf die Form

$$(1) \qquad R = \frac{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{U}_x \cdot \mathfrak{U}_x}{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{Z}_x}$$

bringen, wo $\mathfrak{U}_x$ als Untereck von x das System der unendlich fernen Punkte der *Riemann*schen Fläche bedeutet, während das „Verzweigungspolygon" $\mathfrak{Z}_x$ alle Verzweigungspunkte, und zwar jeden so oft enthält wie die Ordnung der betreffenden Verzweigung angibt. Die Gleichungsform (1) hat aber, wie aus der Theorie der *Abel*schen Integrale bekannt ist, für das gegebene Integral $\int R(x, y)\, dx$ noch die besondere Bedeutung, daß in allen birationalen Transformationen von den für beliebige unabhängige Variable definierbaren Polygonen nur $\mathfrak{U}_x$ und $\mathfrak{Z}_x$ sich ändern, während die Polygone $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beim Ubergang zum neuen Integranden

völlig ungeändert bleiben. Da nun bekanntlich durch birationale Transformationen, welche ja für die Frage nach der eindeutigen Umkehrbarkeit von (II) offenbar völlig belanglos sind, stets bewirkt werden kann, daß $\mathfrak{U}_x$ und $\mathfrak{Z}_x$ weder miteinander noch mit den festen Polygonen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ eine Stelle gemein haben, so dürfen wir ohne jede Beschränkung der Allgemeinheit — und dies soll im folgenden stets geschehen — voraussetzen, daß in (1) nicht nur $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, sondern überhaupt je zwei der vier Polygone $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{U}_x, \mathfrak{Z}_x$ „relativ prim" zueinander sind.

Wenn nun $\mathfrak{B}$ die Stellen $(x, y) = (\alpha_\varrho, \beta_\varrho)$ je n_ϱ $(\varrho = 1, 2, \ldots l)$ mal enthält, was durch die symbolische Gleichung

$$\mathfrak{B} = (\alpha_1, \beta_1)^{n_1} \cdot (\alpha_2, \beta_2)^{n_2} \cdot \cdots \cdot (\alpha_l, \beta_l)^{n_l} \tag{2}$$

ausgedrückt werden möge, und woraus sich also für den „Grad" b von $\mathfrak{B}$ der Wert

$$b = n_1 + n_2 + \cdots n_l \tag{3}$$

ergibt, so sind dies bekanntlich die einzigen Stellen, an denen das durch (II) definierte Integral v unendlich wird, und zwar genau $(n_\varrho - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung $(\varrho = 1, 2, \ldots l)$, resp. rein logarithmisch, falls $n_\varrho = 1$ ist, eine Tatsache, die wir durch die kurze Redewendung ausdrücken wollen, daß der Integrand $R(x, y)$ von (II) zu dem durch (2) definierten Polygon $\mathfrak{B}$ „*gehört*".

Ist andererseits $(x, y) = (\alpha, \beta)$ irgendeine im Polygon $\mathfrak{A}$ auftretende Stelle, so ergibt sich aus unseren Bemerkungen in ihrer Umgebung für R eine Entwicklung von der Form

$$R(x, y) = c_k (x - \alpha)^k + c_{k+1} (x - \alpha)^{k+1} + \cdots,$$

worin k eine positive ganze Zahl bedeutet, während von den Koeffizienten c der erste als von Null verschieden anzunehmen ist. Da hier somit logarithmische Bestandteile bei der Integration nicht auftreten können, so erhalten wir an der Stelle (α, β) für das Integral v die Darstellung

$$v - C = \frac{c_k}{k+1} (x - \alpha)^{k+1} + \frac{c_{k+1}}{k+2} (x - \alpha)^{k+2} + \cdots,$$

worin sich C, nachdem man über den Integrationsweg bis in die Umgebung von (α, β) in irgendeiner Weise verfügt hat, als wohlbestimmte Integrationskonstante ergibt. Wegen $\frac{c_k}{k+1} \neq 0$ folgt aber hieraus nach einem bekannten Theorem (von *Weierstraß*), daß sich x in der Umgebung von $v = C$ und $x = \alpha$ als $(k+1)$-deutige Funktion von v verhält [1]); es muß also, damit (II) eindeutig umkehrbar

---

[1]) Dies ist auch durch beiderseitige Wurzelausziehung nach dem binomischen Lehrsatze:

$$(v - C)^{\frac{1}{k+1}} = (x - \alpha)\left[\frac{c_k}{k+1} + \frac{c_{k+1}}{k+2}(x - \alpha) + \cdots\right]^{\frac{1}{k+1}} = g_1(x - a) + g_2(x - \alpha)^2 + \cdots$$

leicht zu erkennen; denn da hierin für den ersten Koeffizienten g_1 einer der $k+1$ *von Null verschiedenen* Wurzelwerte $\left(\frac{c_k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}$ zu setzen ist, so ergibt sich nach dem gewöhnlichen Satze über die Inversion von Potenzreihen für unabhängige Werte von $v - C$ von hinlänglich kleinen absoluten Beträgen sofort die Umkehrung $x - \alpha = e_1 (v - C)^{\frac{1}{k+1}} + e_2 (v - C)^{\frac{2}{k+1}} + \cdots$, wobei wiederum $e_1 = \frac{1}{g_1} \neq 0$ ist.

ist, $k = 0$ sein, und *als eine notwendige Bedingung der eindeutigen Umkehrbarkeit von* (II) *ergibt sich somit, daß sich Gleichung* (1) *auf*

$$R = \frac{\mathfrak{U}_x \cdot \mathfrak{U}_x}{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{Z}_x} \tag{4}$$

reduzieren und demgemäß $b + 2p - 2 = 0$ *sein muß*, wie man, da Nenner und Zähler in (4) den gleichen Grad besitzen, nach elementaren Beziehungen aus der Theorie der algebraischen Funktionen unmittelbar erkennt.

Es kann also das durch (II) definierte Integral v nur dann eindeutig umkehrbar sein, wenn entweder der Fall

I, wo $p = 1$, $b = 0$ ist, oder der Fall
II, wo $p = 0$, $b = 2$ ist,

vorliegt; und es bleibt nur noch zu untersuchen, ob diese notwendige Bedingung für die eindeutige Umkehrbarkeit auch eine *hinreichende* ist.

Daß dies für den Fall $p = 1$, $b = 0$, d. h. für ein Integral 1. Gattung vom Geschlechte 1 zutreffen muß, wird in der Regel mit Hilfe von Thetafunktionen umständlich bewiesen. Ein anderer Beweis, welcher wenigstens in bezug auf Kürze und Einfachheit nicht mehr zu überbieten sein dürfte, ist der folgende:

Aus den soeben erwähnten elementaren Beziehungen folgt direkt aus (1), daß für die Gradzahl a des Polygons $\mathfrak{A}$ stets die Gleichung $a = b + 2(p - 1)$ besteht, und daß daher (1) hier wegen $p = 1$, $b = 0$ in

$$R = \frac{\mathfrak{U}_x \cdot \mathfrak{U}_x}{\mathfrak{Z}_x} \tag{5}$$

übergeht. Gäbe es nun noch eine von (x, y) verschiedene Stelle (x', y'), welche die Gleichung (II) ebenfalls befriedigt, so könnte sich, wie sofort zu sehen, das Integral $\int_{(x,y)}^{(x',y')} R(x, y)\,dx$ von Null nur um ganzzahlige Vielfache der beiden Periodizitätsmoduln unterscheiden, woraus nach der bekannten Umkehrung des *Abel*schen Theorems, weil hier $p = 1$ ist, auf die Existenz einer rationalen Funktion $\varphi(x, y)$ von x und y zu schließen wäre, welche nur an der Stelle (x', y') verschwindet und nur an der Stelle (x, y) unendlich groß wird, und zwar je 1. Ordnung. Offenbar kann es aber des Residuensatzes wegen eine solche Funktion hier überhaupt nicht geben (denn sonst existierte eine algebraische Funktion $S(x, y) = \varphi(x, y) \cdot R(x, y)$ von x, welche, wie aus (5) unmittelbar folgt, in der ganzen *Riemann*schen Fläche genau eine einzige Residualstelle besäße), und wir sehen daher, *daß durch* (II) *im Falle* $p = 1$, $b = 0$ *x und y für alle endlichen v-Werte, denen überhaupt Stellen der Riemannschen Fläche entsprechen, als schlechthin eindeutige und selbstverständlich auch doppelt periodische Funktionen von v definiert werden.*

Andrerseits ergibt sich für (II) in der Umgebung einer *ganz beliebigen* Stelle (x_0, y_0) der *Riemann*schen Fläche wegen (5), wie leicht ersichtlich, stets eine Entwicklung

$$v - v_0 = c_1 t + c_2 t^2 + \cdots, \tag{6}$$

worin c_1 unter allen Umständen von Null verschieden ist. Dabei bedeutet v_0 den

Wert des Integrals $\int_{(c,d)}^{(x_0,y_0)} R(x,y)\,dx$ in *einem beliebig gewählten Periodenparallelogramm*, und für t ist $(x-x_0)^{\frac{1}{\mu}}$ oder $\frac{1}{x}$ zu setzen, je nachdem (x_0, y_0) eine Stelle im Endlichen von der eventuell verschwindenden Ordnungszahl $\mu - 1$ der Verzweigung ist, oder im Unendlichen liegt, wo ja, wie wir voraussetzen durften, keine Verzweigung stattfindet. Wegen $c_1 \neq 0$ folgt nun hieraus als Umkehrung eine Darstellung von der Form

$$t = \gamma_1 (v - v_0) + \gamma_2 (v - v_0)^2 + \cdots \tag{7}$$

mit wohlbestimmtem Konvergenzkreis K, dessen Radius stets von Null verschieden ist, wie sich aus dem Satz über die Umkehrung von Potenzreihen unmittelbar ergibt. Hierbei sind die Konstanten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ eindeutig durch die Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots$ von (6) bestimmt, die ja ihrerseits, wie bekannt, lediglich von der betreffenden Entwicklung von $R(x,y)$ abhängen, von dem gewählten v_0 aber ganz unabhängig sind. Folglich gilt auch die Entwicklung (7) für *jedes* Periodenparallelogramm, d. h. *sie bleibt völlig ungeändert, wenn man bei der Wahl von v_0 zu einer kongruenten Stelle eines anderen Periodenparallelogramms übergeht.*

Da nun jedenfalls für y oder für $\frac{1}{y}$ an der Stelle (x_0, y_0) eine nach ganzen positiven Potenzen von t fortschreitende Entwicklung existiert, so folgt aus (7), daß nicht nur x oder $\frac{1}{x}$, sondern auch y oder $\frac{1}{y}$ an der Stelle $v = v_0$ den Charakter einer ganzen Funktion von v haben, *daß also x und y an jeder im Endlichen gelegenen Stelle $v = v_0$, an der sie als Funktionen von v überhaupt existieren, den Charakter einer rationalen Funktion dieses Arguments besitzen müssen.*

Es bleibt also nur noch übrig, die *durchgängige Existenz* dieser Funktionen zu beweisen, was sich sehr einfach in folgender Weise erledigen läßt:

In *jedem* Periodenparallelogramm seien die in endlicher Anzahl vorhandenen Stellen $v = v_0^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ markiert, welche sich aus (II), da wir es gegenwärtig mit einem Integral 1. Gattung zu tun haben, für alle im Polygon $\mathfrak{U}_r$ enthaltenen unendlich fernen Punkte der *Riemann*schen Fläche ergeben. Die Konvergenzkreise K_λ der zugehörigen Entwicklungen (7) denken wir uns konstruiert und dann noch jeden derselben konzentrisch beliebig so weit verkleinert, daß sich die Kreise gegenseitig völlig ausschließen, was, weil die Umkehrung von (II) nach unserer jetzigen Voraussetzung, wie wir sahen, für endliche Werte von v nicht mehrdeutig sein kann, die $v_0^{(\lambda)}$ also alle voneinander verschieden sein müssen, stets möglich ist.

Der in jedem Blatt der *Riemann*schen Fläche um den Nullpunkt geschlagene große Kreis O_λ, dessen *Äußeres* die durch die zugehörige Entwicklung (6) bestimmte Umgebung des betreffenden unendlich fernen Punktes darstellt, läßt sich dann wegen Stetigkeit dieser für $\frac{1}{x} = t = 0$ verschwindenden Potenzreihe

(6) offenbar noch derart vergrößern, daß die Gleichung (6) für alle außerhalb des Kreises gelegenen Stellen (x, y) nur solche Werte von v ergibt, welche in den entsprechenden, verkleinerten Kreisen K_λ liegen. Das *Innere* und die Peripherie jedes der so vergrößerten Kreise O_λ betrachten wir dann als ein gleichfalls mit O_λ bezeichnetes endliches Gebiet der *Riemann*schen Fläche, welches mit dem außerhalb und auf der Peripherie der Kreise K_λ sich erstreckenden Teile V' der komplexen v-Ebene offenbar in der Beziehung steht, *daß alle Stellen* (x, y) *der Riemann*schen *Fläche, für welche die vermöge* (II) *ihnen entsprechenden* v-*Werte in* V' *liegen, notwendig den Gebieten* O_λ *angehören müssen.*

Ist nun $(x, y) = (x_0, y_0)$ eine ganz beliebige, im Inneren oder auf der Begrenzung der Gebiete O_λ gelegene Stelle, so gilt dort für x, wie sich durch das Erheben der betreffenden Gleichung (7) in die μ-te Potenz unmittelbar ergibt, stets eine Darstellung von der Form

$$x = x_0 + \gamma_1'(v - v_0) + \gamma_2'(v - v_0)^2 + \cdots, \tag{8}$$

deren Konvergenzkreis C einen sicher von Null verschiedenen Radius r besitzt. Dabei lassen sich die Koeffizienten $\gamma_1', \gamma_2', \ldots$, von denen die $\mu - 1$ ersten natürlich verschwinden müssen, aus den $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ in einfachster Weise berechnen. Es spielen also auch die wirklichen Verzweigungsstellen der *Riemann*schen Fläche ($\mu > 1$) hier gar keine für uns wesentliche Rolle mehr.

Offenbar kann man den Radius r des Konvergenzkreises von (8), da er nach unseren früheren Ausführungen nur von (x_0, y_0) abhängt, von dem für v_0 gewählten Periodenparallelogramm aber unabhängig ist, *in dem betreffenden Gebiete* O_λ als eindeutige Funktion $r(\xi_0, \xi'_0)$ der reellen Koordinaten der komplexen Zahl $x_0 = \xi_0 + i\xi'_0$ betrachten; solange indessen kein exakter Beweis dafür vorliegt, daß diese Funktion auch überall als eine *stetige* zu gelten hat, ist es völlig unzulässig, die Existenz eines Minimums aller dieser Werte von $r(\xi_0, \xi'_0)$ zu behaupten, welches dann ja natürlich von Null verschieden sein müßte. Wohl aber existiert für diese Größen in dem betreffenden O_λ und folglich auch in der Gesamtheit dieser endlichen Gebiete bekanntlich unter allen Umständen eine „*untere Grenze*" u (in der Terminologie von *Weierstraß*), und daß auch diese nicht verschwindet, muß nun erst sorgfältig bewiesen werden:

Nach dem bekannten *Weierstrass*schen Satze gibt es im Inneren der Gebiete O_λ oder auf ihrer Begrenzung mindestens eine Stelle $(x_0, y_0) = (\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, deren zugehöriges r mit $\bar{r}$ bezeichnet sein möge, von der Beschaffenheit, daß für alle Stellen (x_0, y_0) innerhalb einer *beliebig kleinen*, den Gebieten O_λ angehörigen Umgebung U von $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ die untere Grenze der zugehörigen r ebenfalls den Wert u besitzt. Für U wählen wir eine um $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ herum abgegrenzte Kreisfläche (bzw. kreisförmige Windungsfläche), insoweit sie innerhalb der Gebiete O_λ liegt, welche so klein ist, daß für alle in ihrem Inneren und auf ihrer Begrenzung gelegenen Stellen (x_0, y_0) der absolute Betrag $|v_0 - \bar{v}_0|$ der an der Stelle $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ geltenden Potenzentwicklung (6), die ja hier für $x = x_0$ die Form

$$v_0 - \bar{v}_0 = \bar{c}_1 (x_0 - \bar{x}_0)^{\frac{1}{\mu}} + \bar{c}_2 (x_0 - \bar{x}_0)^{\frac{2}{\mu}} + \cdots$$

annimmt, höchstens den von Null verschiedenen Wert $\frac{\bar{r}}{2}$ besitzt. Wegen der Stetigkeit dieser für $x_0 = \bar{x}_0$ verschwindenden Potenzreihe ergibt sich dabei der Radius von U sicher als eine von Null verschiedene Größe. Es genügen dann nicht nur alle diese (x_0, y_0), wenn wir unter $v_0, \bar{v}_0$ die entsprechenden v-Werte verstehen, für $x = x_0$ und $v = v_0$ der nach dem Schema (8) für die Stelle $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ zu bildenden Umkehrungsgleichung

$$x = \bar{x}_0 + \bar{\gamma}_1'(v - \bar{v}_0) + \bar{\gamma}_2'(v - \bar{v}_0)^2 + \cdots, \tag{9}$$

deren Konvergenzkreis $\bar{C}$ ja den Radius $\bar{r}$ besitzt, sondern es können die *eigenen* Umkehrungsgleichungen (8) dieser Stellen (x_0, y_0) nach dem *Taylor*schen Satze auch direkt aus (9) abgeleitet werden, so daß ihre, um die zugehörigen Stellen $v = v_0$ beschriebenen Konvergenzkreise C mindestens bis an die Peripherie von C heranreichen, also notwendig je einen Radius $r \geqq \frac{\bar{r}}{2}$ besitzen müssen, denn wegen $|v_0 - \bar{v}_0| \leqq \frac{\bar{r}}{2}$ kann v_0 nicht um weniger als um $\frac{\bar{r}}{2}$ von der Peripherie des um $\bar{v}_0$ beschriebenen Kreises $\bar{C}$ entfernt sein. Folglich muß nach dem *Weierstraß*schen Satze auch $u \geqq \frac{\bar{r}}{2}$, also *sicher eine von Null verschiedene positive Größe sein.*

Nach diesen Vorbereitungen sind wir imstande, die Frage, ob x und y als Funktionen von v überall existieren, oder, mit anderen Worten, ob *jedem beliebigen* Werte von v eine die Gleichung (II) befriedigende Stelle (x, y) der *Riemann*schen Fläche wirklich korrespondiert, in dem jetzt betrachteten Falle $p = 1$, $b = 0$ sofort vollständig zu beantworten: Ist v ein beliebiger endlicher Wert, so liegt er entweder in einem der von uns konstruierten Kreise K_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ oder im Restgebiet V' der komplexen v-Ebene. Im ersten Falle ist die Existenz der Funktionen x und y an der Stelle v durch die für den betreffenden Kreis geltende Entwicklung (7), die sich ja hier als Umkehrung von (6) auf die Umgebung einer ganz bestimmten Stelle des Polygons $\mathfrak{U}_x$ bezieht, unmittelbar gesichert. Im zweiten Falle dagegen sind die folgenden beiden Tatsachen von entscheidender Bedeutung:

1. Es gibt auch in V' Stellen $v = v_0$, in denen x und y als Funktionen von v existieren. (Da wir uns die Kreise K_λ willkürlich verkleinert denken konnten, so steht es uns jederzeit frei, den Bereich V' durch Ringgebiete, *in denen diese Funktionen existieren*, zu erweitern.)

2. An *keiner* in V' gelegenen Stelle $v = v_0$, welcher ein bestimmter Punkt $(x, y) = (x_0, y_0)$ der *Riemann*schen Fläche wirklich entspricht, *kann der Konvergenzradius der zugehörigen Entwicklung* (8) *unter den von* v_0 *ganz unabhängigen, von Null verschiedenen, festen, positiven Betrag u herabsinken*, (denn da v_0 in V' liegt, muß der korrespondierende Punkt (x_0, y_0), wie wir sahen, notwendig einem der Gebiete O_λ angehören usw.).

Hiernach ist klar, daß man von irgendeiner der ad 1. genannten Stellen

$v = v_0$ ausgehend *jede* in V' gelegene, willkürlich vorgeschriebene Stelle v von endlichem Wert unter allen Umständen bei der *analytischen Fortsetzung* der Funktion x auf Grund der betreffenden Entwicklungen (8) *wirklich erreichen*, also dem Existenzbereiche dieser Funktion einverleiben kann. Dem Fortsetzungswege, der von v_0 bis v führt, entspricht dabei eine ganz bestimmte, von der betreffenden Stelle (x_0, y_0) ausgehende Bahn von x in der *Riemann*schen Fläche, wodurch auch die zugehörigen y-Werte sofort mitbestimmt werden.

Unseren obigen Resultaten gemäß müssen daher x und y eindeutige, doppeltperiodische Funktionen von v sein, welche im Endlichen *überall* den Charakter einer rationalen Funktion besitzen und daher, wie bekannt, als Quotienten ganzer transzendenter Funktionen allgemeingültig darstellbar sind.

In bezug auf den Fall $p = 1$, $b = 0$ haben wir also für unsere Umkehrungsfunktionen, wenn wir hierunter alle rationalen Verbindungen von x und y verstehen, die die elliptischen Funktionen charakterisierenden Fundamentaleigenschaften, ohne, wie üblich, die Theorie der Differentialgleichungen, oder die der konformen Abbildung, oder gar die der Thetafunktionen irgendwie zu benutzen, auf ganz direktem Wege höchst einfach hiermit sämtlich nachgewiesen.

Was nun den Fall II, wo $p = 0$, $b = 2$ ist, anbelangt, so läßt sich bekanntlich bei verschwindendem p die *Riemann*sche Fläche durch birationale Transformationen auf die gewöhnliche komplexe Ebene reduzieren, so daß $R(x, y) = R(x)$ d. h. als eine rationale Funktion von x allein angenommen werden kann, wobei die symbolische Gleichung (1) in

$$R = \frac{\mathfrak{U}_x \cdot \mathfrak{U}_x}{\mathfrak{B}} \tag{10}$$

übergehen muß, denn bei fortfallendem $\mathfrak{Z}_x$ kann hier wegen $b = 2$ offenbar auch das Zählerpolygon $\mathfrak{A}$ nicht auftreten. Auch hier kann $\mathfrak{B}$ als relativ prim zu $\mathfrak{U}_x$ angenommen werden, denn, sollte bei der angewandten birationalen Transformation etwa eine Stelle von $\mathfrak{B}$ ins Unendliche gerückt sein, so läßt sich dies durch eine weitere linear gebrochene Substitution für x leicht wieder rückgängig machen.

Da hier $b = 2$ ist, so sind als einzige Unendlichkeitsstellen der rationalen Funktion $R(x)$ im Polygon $\mathfrak{B}$ zwei von einander verschiedene Stellen $x = a_1, a_2$ je einmal, oder nur eine Stelle $x = a$ zweimal enthalten. In dem einen oder anderen Falle müssen also hinsichtlich dieser im Endlichen gelegenen Stellen für $R(x)$ Entwickelungen von der Art

$$\begin{cases} R(x) = \dfrac{a}{x - a_1} + \mathfrak{P}_1(x - a_1) \\ R(x) = \dfrac{-a}{x - a_2} + \mathfrak{P}_2(x - a_2), \end{cases}$$

oder von der Art $R(x) = \dfrac{a}{(x-a)^2} + \mathfrak{P}(x - a)$ bestehen, worin $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ gewöhnliche Potenzreihen und a einen konstanten Koeffizienten bedeuten. Nach den Elementen der Funktionentheorie kann sich daher $R(x)$ im ersten Falle von der Funktion $a\left(\dfrac{1}{x - a_1} - \dfrac{1}{x - a_2}\right)$, im zweiten Falle von der Funktion $\dfrac{a}{(x-a)^2}$

nur durch eine additive Konstante unterschieden, und diese Konstante muß verschwinden, da ja $R(x)$ wegen (10) für $x = \infty$ von der zweiten Ordnung Null wird. Unser Integral (II) geht also hier über in

$$v = \int_c^x R(x)\,dx = \int_c^x \left(\frac{a}{x-a_1} - \frac{a}{x-a_2}\right) dx = a \log \frac{x-a_1}{x-a_2} - a \log \frac{c-a_1}{c-a_2},$$

resp. in

$$v = \int_c^x \frac{a}{(x-a)^2}\,dx = -\frac{a}{x-a} + \frac{a}{c-a},$$

woraus sich sofort die eindeutigen Umkehrungen

$$x = \frac{a_2(c-a_1)\,e^{\frac{v}{a}} - a_1(c-a_2)}{(c-a_1)\,e^{\frac{v}{a}} - (c-a_2)}, \qquad \text{resp.} \quad x = a - \frac{a}{v - \dfrac{a}{c-a}} \quad \text{ergeben.}$$

Mit Rücksicht darauf, daß der zuerst behandelte Fall $p = 1$, $b = 0$ bekanntlich die hinreichende und notwendige Bedingung dafür bildet, daß sich das betreffende Integral birational in ein elliptisches Integral 1. Gattung transformieren läßt, können wir also das Resultat unserer Betrachtungen wie folgt formulieren:

Ein einzelnes Abelsches Integral ist dann und nur dann in dem angegebenen Sinne eindeutig umkehrbar, wenn es sich, je nachdem es von der 1ten, 2ten, *oder* 3ten *Gattung ist, durch eine birationale Transformation auf ein elliptisches Integral 1. Gattung, oder auf die rationale Funktion* $\int \frac{a}{(x-a)^2}\,dx = -\frac{a}{x-a} + konst.$, *oder auf den Logarithmus* $\int \left(\frac{a}{x-a_1} - \frac{a}{x-a_2}\right) dx = a \log \frac{x-a_1}{x-a_2} + konst.$ *reduzieren läßt, wobei* a, a, a_1, a_2 *beliebige konstante Werte bedeuten, unter denen die beiden letzten voneinander verschieden sind.*

Um zu zeigen, mit wie einfachen Mitteln sich der Fall $n = 1$ vollständig erledigen läßt, habe ich hier von den, in der Einleitung zum Teil angegebenen Hauptresultaten meiner früheren allgemeinen Untersuchungen gar keinen Gebrauch gemacht. Daß es aber unter Benutzung dieser Resultate nicht schwer ist, auch für höhere Werte von n zu wesentlich neuen Ergebnissen zu gelangen, soll nun durch einige Andeutungen über den Fall $n = 2$ zum Schluß noch erläutert werden:

Wir betrachten also jetzt das Gleichungssystem

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} v_1 = \int\limits_{(c_1,d_1)}^{(x_1,y_1)} R_1(x,y)\,dx + \int\limits_{(c_2,d_2)}^{(x_2,y_2)} R_1(x,y)\,dx \\ v_2 = \int\limits_{(c_1,d_1)}^{(x_1,y_1)} R_2(x,y)\,dx + \int\limits_{(c_2,d_2)}^{(x_2,y_2)} R_2(x,y)\,dx, \end{cases}$$

wobei wie im allgemeinen Falle die unteren Integrationsgrenzen willkürlich aber fest gegebene, die oberen dagegen unbegrenzt veränderliche Stellen der *Riemann*schen Fläche bedeuten sollen unter der Voraussetzung, daß die zwischen denselben Grenzen genommenen Integrationswege übereinstimmen müssen, im übrigen aber beliebig sind. Wie bekannt, ist dann die eindeutige Umkehr-

barkeit durch die Forderung zu definieren, daß zu jedem Wertepaar v_1, v_2, wofern nur diese Größen wirklich unabhängig voneinander gewählt sind, ein und nur ein System von Stellen $(x, y) = (\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$ gehören soll, mit denen die Stellen $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ in irgendeiner Reihenfolge übereinstimmen müssen, um die Relationen (III) bei geeigneter Verfügung über die Integrationswege zu erfüllen. Wir denken uns dann in analoger Weise, wie oben dargelegt, die Gleichungen

$$R_\lambda = \frac{\mathfrak{A}_\lambda \cdot \mathfrak{U}_x \cdot \mathfrak{U}_x}{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{Z}_x} \qquad (\lambda = 1, 2) \tag{11}$$

hergeleitet, durch welche die rationalen Funktionen $R_\lambda = R_\lambda(x, y)$ symbolisch als Polygonquotienten dargestellt werden, wobei für das Polygon $\mathfrak{B}$, zu dem die R_λ gemäß (11) „gehören", und für dessen Grad b wiederum die Gleichungen (2) und (3) gelten mögen. Beim Vergleich mit dem vorigen Falle $n = 1$ ist hier nur der Unterschied zu beachten, daß wir in Anbetracht des gemeinsamen Nenners in (11) die Polygonpaare $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}$ nicht mehr als relativ prim ansehen, sondern nur voraussetzen können, daß $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}$ keinen „gemeinsamen Teiler" haben, und daß demgemäß für jede Stelle $(\alpha_\varrho, \beta_\varrho)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots l)$ von $\mathfrak{B}$ wenigstens eins der beiden Integrale $\int R_1(x, y)\, dx$, $\int R_2(x, y)\, dx$ $(n_\varrho - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung (resp. rein logarithmisch) unendlich wird, während das andere dort auch von niedrigerer Ordnung unendlich werden, oder gar endlich bleiben darf.

Da nun im allgemeinen Fall des Ansatzes (I) stets $n \geqq \frac{b}{2} + p$ sein muß, damit die eindeutige Umkehrbarkeit nicht von vornherein ausgeschlossen ist (Math. Ann. 77 (1916), S. 369), so ergibt sich hier wegen $n = 2$ die Zahl 4 als Maximalwert für b, und diese Größe darf demgemäß hier nur einen der vier Werte $b = 0, 2, 3, 4$ besitzen. In den drei ersten Fällen müssen, wie in der Einleitung bereits ausgeführt, R_1, R_2 ein *vollständiges* System linear unabhängiger Integranden bilden, die zum Polygon $\mathfrak{B}$ „gehören", woraus sich nach dem *Riemann-Roch*schen Satze die Bedingung $n = 2 = \begin{cases} p, b = 0 \\ b + p - 1, b = 2, 3 \end{cases}$ ergibt, während für $b = 4$ die Relation $n \geqq \frac{b}{2} + p$ sich hier offenbar auf die Gleichung $2 = n = \frac{b}{2} + p = 2 + p$ reduzieren muß. Wir sind also jetzt schon zu dem Ergebnis gelangt, daß mit der eindeutigen Umkehrbarkeit von (III) nur die folgenden vier Fälle verträglich sind:

I. $b = 0, \quad p = 2$
II. $b = 2, \quad p = 1$
III. $b = 3, \quad p = 0$
IV. $b = 4, \quad p = 0$

Im ersten Falle kann die *Riemann*sche Fläche wegen $p = 2$ bekanntlich stets als eine hyperelliptische, im zweiten $(p = 1)$ als eine elliptische vorausgesetzt werden, während sie in den beiden letzten Fällen $(p = 0)$ sich auf die gewöhnliche

komplexe Ebene reduzieren läßt. Nach dem *Riemann-Roch*schen Satze besteht jedes *vollständige* System von Integranden, die zum Polygon $\mathfrak{B}$ „gehören", in den ersten drei Fällen aus je 2 Integranden φ_1, φ_2, im vierten dagegen aus 3 Integranden ψ_1, ψ_2, ψ_3. Im ersten Falle hat man für φ_1, φ_2 zwei linear unabhängige hyperelliptische Integrale 1. Gattung des Geschlechts $p = 2$ zu wählen; im zweiten Falle kann für φ_1 der Integrand des elliptischen Integrals 1. Gattung und für φ_2 je nachdem $\mathfrak{B}$ von der Form $\mathfrak{B} = (\alpha, \beta)^2$, oder von der Form $\mathfrak{B} = (\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2)$ ist, der Integrand des elliptischen Normalintegrals 2. Gattung, das die einfache Unendlichkeitsstelle (α, β) besitzt, oder der Integrand des elliptischen Normalintegrals 3. Gattung mit den Unendlichkeitsstellen (α_1, β_1), (α_2, β_2) gewählt werden. Wie endlich φ_1 und φ_2, resp. ψ_1, ψ_2, ψ_3 im dritten und vierten Falle bestimmt werden können, ergibt sich unmittelbar durch Spezialisierung der allgemeinen Tatsache, daß, wenn $p = 0$ ist, die $b - 1$ rationalen Funktionen

$$\frac{1}{x - a_\lambda} - \frac{1}{x - a_1} \ (\lambda = 2, 3, \ldots l) \quad \text{und} \quad \frac{1}{(x - a_\varrho)^{\varrho_\mu}} \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots l \\ \varrho_u = 2, 3, \ldots n_\varrho \end{pmatrix}$$

dem *Riemann-Roch*schen Satze gemäß ein vollständiges System linear unabhängiger Integranden bilden, die zu dem durch Gleichung (2) definierten Polygon $\mathfrak{B}$ „gehören", (da sie nämlich teils in ihren Unendlichkeitsstellen von einander abweichen, teils an der gleichen Stelle verschieden hohe Ordnungen des Unendlichwerdens aufweisen, müssen sie linear unabhängig von einander sein, denn jede wirkliche Linearverbindung derselben muß mindestens eine Unendlichkeitsstelle haben, weil ja ein gegenseitiges Sichaufheben der unendlich großen Bestandteile nach dem eben Gesagten ausgeschlossen ist).

Aus obigen Darlegungen folgt dann für die Integranden $R_\lambda = R_\lambda(x, y)$ $(\lambda = 1, 2)$ des Ansatzes (III), daß in den ersten 3 Fällen Gleichungen von der Form

$$\begin{cases} R_1 = a_{11}\,\varphi_1 + a_{12}\,\varphi_2 \\ R_2 = a_{21}\,\varphi_1 + a_{22}\,\varphi_2\,, \end{cases}$$

im vierten Falle dagegen Gleichungen von der Form

$$\begin{cases} R_1 = \beta_{11}\,\psi_1 + \beta_{12}\,\psi_2 + \beta_{13}\,\psi_3 \\ R_2 = \beta_{21}\,\psi_1 + \beta_{22}\,\psi_2 + \beta_{23}\,\psi_3 \end{cases}$$

bestehen müssen, worin die α und β konstante Koeffizienten bedeuten, während die φ und ψ in allen Fällen in der angegebenen Weise bestimmt werden können.

Aus einem früher von mir bewiesenen, allgemeinen Satze (J. f. Math. 154 (1924), S. 50 ff. und Math. Ann. 77 (1916), S. 386 ff.) ergibt sich sofort, daß in den ersten 3 Fällen die eindeutige Umkehrbarkeit von (III) auch wirklich gesichert ist, wenn die Koeffizienten α beliebig gewählt werden, wofern nur die Determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ nicht verschwindet. Im vierten Falle dagegen müssen die Koeffizienten $\beta_{1\lambda}$ und $\beta_{2\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, 3)$ außer der selbstverständlichen Bedingung, daß sie einander nicht proportional sein dürfen, gewissen Beziehungen genügen, die, weil hier der Fall $n = \frac{b}{2} + p$ vorliegt, gemäß § 3 der ersten meiner vorgenannten Abhandlungen (Math. Ann. 77 (1916), S. 370 ff.) zu bestimmen sind.

Annäherung beliebiger komplexer Größen durch ganze Zahlen des Körpers $\sqrt{-2}$.[1]

Von Dr. *Paul Buchner*.

Mit 1 Tafel.

Einleitung.

1. Mit großem Erfolg hat *Hermann Minkowski* geometrische Vorstellungen in die Zahlentheorie eingeführt. Aus seinem tiefgreifenden Prinzip der zentrierten konvexen Körper[2]) im Zahlgitter beweist *Minkowski* den Satz[3]):

In den n ganzen, homogenen Formen von n Variablen

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}\,x_n \\
\xi_2 &= a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}\,x_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_n &= a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}\,x_n
\end{aligned}$$

mit beliebigen reellen Koeffizienten und einer von Null verschiedenen Determinante Δ kann man den Variablen immer solche ganzzahlige Werte, die nicht sämtlich Null sind, geben, daß dabei

$$\max\{|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots\ldots, |\xi_n|\} \leqq \sqrt[n]{|\Delta|}$$

wird. Von diesem Resultat macht *Minkowski* zahlreiche Anwendungen auf die Theorie der speziellen konvexen Körper, auf das Problem der dichtesten Lagerung und auf die Theorie der Formen. Solchen Anwendungen sind auch wesentlich seine „Diophantische Approximationen“[4]) gewidmet. Insbesondere legt er im letzten Kapitel der Dioph. Approximationen seinen Untersuchungen zwei binäre lineare Formen

$$\begin{aligned}
\xi &= \alpha x + \beta y \\
\eta &= \gamma x + \delta y\,,
\end{aligned} \qquad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

---

[1]) Habilitationsschrift zur Erwerbung der Venia Legendi an der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel, 1924.

[2]) *H. Minkowski*: Verh. d. 64. Naturf. u. Ärztevers. z. Halle 1891, p. 13 oder Ges. Abhandl. Bd. I, Nr. X, Über Geometrie der Zahlen, pg. 264.

[3]) *H. Minkowski*: Ges. Abhandl. Bd. I, Nr. XI, Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite, 1893, pg. 266 oder in dem Hauptwerk: Geometrie der Zahlen, 1896, pg. 104.

[4]) *H. Minkowski*: Dioph. Approximationen, 1907, Leipzig. Siehe auch: *H. Minkowski*: Die Geometrie der Zahlen, Verh. d. III. Intern. Math. Kongress. Heidelberg, 1904, pg. 164 oder Ges. Abh. Bd. II, Nr. XX, pg. 43.

mit beliebigen *komplexen Koeffizienten* und Variablen x, y aus einem quadratischen, *imaginären* Zahlkörper zugrunde. Damit gibt *Minkowski* die Anregung für ein Formensystem mit komplexen Koeffizienten analoge Theoreme aufzustellen, wie für Systeme mit reellen Zahlkoeffizienten.

2. Ergibt sich im Reellen über ein System derartiger linearer Formen ein einziger Satz [1]), so erhält man im Komplexen je nach der Wahl des Körpers deren eine große Mannigfaltigkeit. *Minkowski* beschränkt seine Untersuchungen auf die Körper der dritten und vierten Einheitswurzeln, der für das vorliegende Problem einfachsten Körper, und erhält für diese als erstes Resultat den *Satz*:

Es ist möglich, die ganzen Zahlen x, y im Körper $\sqrt{-3}$ derart zu bestimmen, daß

$$(1) \qquad \max. \left\{ |\xi|, |\eta| \right\} < \sqrt[4]{\frac{12}{\pi^2}} |\sqrt{\Delta}|$$

wird. Im Körper $\sqrt{-1}$ kann ein Paar ganzer Zahlen x, y stets so gefunden werden, daß

$$(2) \qquad \max. \left\{ |\xi|, |\eta| \right\} < \frac{2}{\sqrt{\pi}} |\sqrt{\Delta}|$$

wird.

Im § 1 der vorliegenden Arbeit wird allgemein nachgewiesen, daß es stets ganze, nicht zugleich verschwindende Zahlen x, y des Körpers $\sqrt{-d}$ gibt, derart, daß

$$(3) \qquad \max. \left\{ |\xi|, |\eta| \right\} < \sqrt[4]{\frac{4d}{\pi^2}} |\sqrt{\Delta}|$$

wird, wo $-d$ eine Diskriminante bedeutet [2]). Hieraus ergeben sich die Spezialfälle (2) und (3). Diese Ungleichungen erhält man durch Abschätzung des Volumens des konvexen Körpers

$$(4) \qquad \max. \{|\xi|, |\eta|\} \leqq M,$$

wobei M den kleinsten Wert bedeutet, den die reellwertige Funktion max. $\{|\xi|, |\eta|\}$ für ganzzahliges $(x, y) \neq (0, 0)$ annimmt. Auf Grund des allgemeinen Satzes von *Minkowski* [3]) über konvexe Bereiche muß das Volumen des konvexen Körpers (4), mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt, kleiner als 2^4 sein.

3. Da der betrachtete konvexe Körper (4) kein Polyeder ist, so können in den Ungleichungen (1) — (3) die Grenzwerte selbst niemals erreicht werden [4]), vielmehr läßt sich stets ein Zahlenpaar x, y so finden, daß max. $\{|\xi|, |\eta|\}$ *kleiner* wird als die angeführten Grenzwerte (1) — (3). Es erhebt sich daher die Frage nach dem *genauen Minimum* dieser binären, linearen Formen.

---

[1]) *C. Siegel*: Approximationen algebr. Zahlen, Math. Zeitschr. Bd. 10, 1921, pg. 173.

[2]) Für die zahlentheoretischen Sätze siehe *E. Hecke*: Theorie d. algebr. Zahlen, 1923.

[3]) *H. Minkowski*: Über Geometrie d. Zahlen, Ges. Abh. Bd. I, Nr. X, 1891, p. 264, ferner Über Eigenschaften von ganzen Zahlen, die durch die räumliche Anschauung erschlossen sind, Ges. Abh. Bd. I, Nr. XII, pg. 271, 1893 oder Geometrie der Zahlen, 1896, pg. 73.

[4]) *H. Minkowski*: Ges. Abh. Bd. I, pg. 274 oder Geometrie d. Zahlen, pg. 96.

Im Falle des Körpers $\sqrt{-3}$ findet *Minkowski* [1]), daß stets

$$\text{max.}\{|\xi|, |\eta|\} \leqq |\sqrt{\Delta}|$$

gemacht werden kann. Das Gleichheitszeichen gilt nur in denjenigen Fällen, wo wenigstens eine der Formen ξ, η von der Gestalt

$$|\sqrt{\Delta}|\, e^{i\omega}(-qx + py)$$

ist, wobei ω eine beliebige reelle Größe und (p, q) ganze, teilerfremde Zahlen des Körpers $\sqrt{-3}$ bedeuten.

Minkowski nennt es eine merkwürdige Tatsache, daß in dem Körper der vierten Einheitswurzel der entsprechende Satz und der darin enthaltene Grenzfall einen wesentlich andersartigen Charakter trägt. Er weist nach, daß es stets ganze Zahlen im Körper $\sqrt{-1}$ gibt, so daß

$$\text{max.}\left\{|\xi|, |\eta|\right\} \leqq \left|\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}\,\Delta}\right|$$

wird. Das Gleichheitszeichen gilt dabei nur, wenn ξ, η so beschaffen sind, daß eine ganzzahlige Substitution von einer Determinante $\varepsilon = \pm 1$ oder $\pm i$ existiert, welche die Formen (ξ, η) in das Formenpaar

$$\left|\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}\,\Delta}\right| e^{\frac{2\pi i}{48}+\omega i}[X + (-i-j^2)\,Y]$$

$$\varepsilon\left|\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}\,\Delta}\right| e^{\frac{2\pi i}{48}-\omega i}[X\ \ (1-i\,j^2) + Y]$$

überführen, wobei $j = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ und ω eine reelle Größe bedeutet.

4. Um weiteres Material über den allgemeinen Charakter dieser Sätze, wie auch den Zusammenhang der im Grenzwert auftretenden Irrationalität mit der Körperdiskriminante $(-d)$ zu erhalten, habe ich den Körper $\sqrt{2}\,i$ eingehend untersucht. Damit wird ein Körper herangezogen, der bereits allgemeinere Verhältnisse aufweist; insbesondere reduziert sich die Anzahl der Einheiten, die bei *Minkowski* von wesentlicher Bedeutung [2]) sind und den Beweis erheblich zu vereinfachen gestatten, auf zwei. Im § 12 wird als das Hauptresultat dieser Arbeit nachgewiesen, daß es im Körper $\sqrt{-2}$ stets ganze Zahlen x, y gibt, so daß

$$\text{max.}\left\{|\xi|, |\eta|\right\} \leqq \left|\sqrt[4]{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}\sqrt{\Delta}\right|$$

wird. Das Gleichheitszeichen gilt dabei nur, wenn es ganzzahlige Substitutionen der Determinante ± 1 gibt, welche die Formen (ξ, η), abgesehen von der Reihenfolge, in die Formen

---

[1]) *H. Minkowski*: Diophantische Approximationen, pg. 233.
[2]) *H. Minkowski*: Dioph. Approximationen, pg. 189.

$$\left|\sqrt[4]{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}\sqrt{\Delta}\right| e^{i\omega_1}\left[X+\left(\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}i\right)Y\right]$$
$$\left|\sqrt[4]{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}\sqrt{\Delta}\right| e^{i\omega_2}\left[\left(\frac{3-\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}i\right)X+Y\right]$$

überführen, worin ω_1, ω_2 reelle Größen darstellen. Demnach ergeben sich als Grenzwerte im Körper

$$K(j): \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}} = 1{,}0561\ldots.$$
$$K(i): \quad 1$$
$$K(\sqrt{2}i): \sqrt[4]{\frac{3+\sqrt{6}}{3}} = 1{,}16094\ldots.$$

5. Ein Hauptziel der vorliegenden Untersuchung war festzustellen, wie weit die von *Minkowski* gegebene geometrische Untersuchungsmethode ausreichend und gangbar sei. Im ersten Unterfalle $E = 1$ sind 58 Gebietspaare zu untersuchen, während *Minkowski* noch mit 5 auskommt. Deswegen erwies sich die Heranziehung neuer Prinzipien als notwendig, immerhin unter Beibehaltung der geometrischen Methodik. Die Zahl dieser Bereiche wird mit wachsender Körperdiskriminante rasch zunehmen und vielleicht bezeichnet schon der Körper $\sqrt{2}i$ die Grenze der Leistungsfähigkeit dieser Methode.

Um weiteres Material für den allgemeinen quadratischen Zahlkörper zu erhalten, sollen diese Untersuchungen auf Körper die nicht die Klassenzahl 1 besitzen, ausgedehnt werden.

§ 1. Linearformen im quadratischen Zahlkörper.

Ist ϑ eine beliebige komplexe Größe und setzt man

$$x = x_1 + \vartheta x_2, \qquad y = y_1 + \vartheta y_2,$$

so entspricht jedem Wertsystem der vier reellen Variablen x_1, x_2, y_1, y_2 ein Paar komplexer Zahlen x, y. Jede eindeutige Funktion $f(x_1, x_2, y_1, y_2)$ der vier reellen Argumente kann alsdann als eine reellwertige Funktion dieser komplexen Variablen x, y aufgefaßt werden im Sinne der *Dirichlet*schen Funktionsdefinition:

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = \varphi(x, y).$$

Diese Funktion $\varphi(x, y)$ soll den Bedingungen genügen:

(1) $\varphi(0, 0) = 0$,
(2) $\varphi(x, y) > 0$, falls $(x, y) \neq (0, 0)$ ist,
(3) $\varphi(tx, ty) = |t| \cdot \varphi(x, y)$ für jedes reelle t,
(4) $\varphi(x + x^*, y + y^*) \leqq \varphi(x, y) + \varphi(x^*, y^*)$,
(5) $\varphi(\tau x, \tau y) = \varphi(x, y)$,

falls τ eine komplexe Größe vom absoluten Betrage 1 darstellt. Bezeichnet dann μ eine beliebige komplexe Größe, so folgt aus (3) und (5)

$$\varphi(\mu x, \mu y) = |\mu| \varphi(x, y).$$

Durch die Ungleichung

$$\varphi(x, y) \leqq 1$$

wird ein konvexer Körper mit Mittelpunkt im Nullpunkt im vierdimensionalen Zahlgitter x_1, x_2, y_1, y_2 definiert. Nach *Minkowski* enthält ein konvexer Körper mit Mittelpunkt im Nullpunkt, dessen Volumen

$$J = \iiiint dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

gleich 16 ist, außer seinem Mittelpunkt immer noch mindestens einen weiteren Gitterpunkt. Wir wenden diesen Satz an auf die Linearformen:

$$\xi = \alpha x + \beta y, \qquad \eta = \gamma x + \delta y,$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige komplexe Größen mit nichtverschwindender Determinante Δ bedeuten. Durch

$$\varphi(x, y) = \max. \{ |\xi|, |\eta| \} \leqq 1 \tag{6}$$

wird eine reellwertige Funktion definiert, welche den Bedingungen (1) — (5) Genüge leistet. Für das Volumen dieses Eichkörpers ergibt die Durchführung der Integration

$$J = \frac{4\pi^2}{d} \cdot \frac{1}{|\Delta|^2},$$

wenn

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma, \qquad \vartheta = \frac{-d + i\sqrt{d}}{2}$$

ist. Bezeichnet M den kleinsten Wert den die Funktion φ für ganzzahlige, nicht insgesamt verschwindende Werte der Argumente x_1, x_2, y_1, y_2 anzunehmen vermag, so wird durch

$$\varphi(x, y) \leqq M \tag{7}$$

ein zum Eichkörper (6) zugeordneter M-Körper definiert, der auf seiner Oberfläche ein Paar zum Nullpunkt symmetrisch gelegene Gitterpunkte besitzt und dessen Volumen

$$J_0 = \frac{4\pi^2}{d} \cdot \frac{M^4}{|\Delta|^2}$$

beträgt. Da nach dem *Minkowski*schen Satz dieses Volumen kleiner als 16 sein muß, ergibt sich der

Satz 1: Zu zwei Linearformen ξ, η in zwei komplexen Variablen mit beliebigen komplexen Koeffizienten und nicht verschwindender Determinante Δ lassen sich für die Variablen immer zwei ganze Zahlen des quadratischen, imaginären Zahlkörpers $K(\vartheta)$, die nicht zugleich verschwinden, derart angeben, daß für diese Zahlen zugleich gilt:

$$|\xi| < \sqrt[4]{\frac{4d}{\pi^2}|\Delta|^2}, \qquad |\eta| < \sqrt[4]{\frac{4d}{\pi^2}|\Delta|^2}. \tag{8}$$

Der M-Körper (7) besitzt auf seiner Oberfläche mindestens ein Paar Gitterpunkte $x = p$, $y = q$ und $x = -p$, $y = -q$. Wir untersuchen lediglich

vierfache M-Körper, die auf ihrer Oberfläche außerdem noch einen mit $(p; q)$ nicht assoziiertes Gitterpunktpaar $(r; s)$ und $(-r; -s)$ besitzen. Es ist also zugleich

$$\varphi(p, q) = M\,, \qquad \varphi(r, s) = M\,.$$

Mit Hilfe der Ungleichung

$$\psi(x, y) = |xq - yp| + |xs - yr| \leqq |E| \tag{9}$$

leitet man eine obere Grenze für den absoluten Betrag der Determinante

$$E = ps - rq$$

ab. Der durch diese Ungleichung definierte konvexe Körper ist vollständig im M-Körper (7) enthalten. Durch Integration findet man für das Volumen J_1 dieses konvexen Körpers

$$J_1 = |E|^2 \cdot \frac{2\pi^2}{3d}\,.$$

Da das Volumen dieses Körpers aber kleiner als 16 sein muß, so ergibt sich als obere Grenze von $|E|$

$$|E|^2 < \frac{24d}{\pi^2}\,. \tag{10}$$

Hieraus ergeben sich die von *Minkowski* behandelten Spezialfälle:

$$d = 3 \qquad |E|^2 < \frac{72}{\pi^2}\,,$$

$$d = 4 \qquad |E|^2 < \frac{96}{\pi^2}\,.$$

§ 2. Die Zahlwerte der Determinante E im Körper $\sqrt{2}\,i$.

Im folgenden beschränken wir uns auf den Körper $K = K(\sqrt{2}\,i)$ und setzen daher für die Basiszahl

$$\vartheta = \sqrt{2}\,i\,.$$

Die Ungleichung (10) ergibt uns als obere Grenze des Betrages der Determinante E

$$|E|^2 < \frac{192}{\pi^2} = 19,4\ldots < 20\,.$$

Als Norm einer ganzen Zahl in K wird dadurch $|E|^2$ auf die Zahlwerte

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19$$

eingeschränkt. Um eine weitere Verringerung der zulässigen Werte von E zu erhalten, bemerke man, daß mit $(r; s)$ stets auch $(-r; -s)$ Gitterpunkt auf der Oberfläche des M-Körpers ist, so daß man immer erreichen kann, daß E einen positiven Realteil besitzt. Ferner dürfen $(p; q)$ und $(r; s)$ je als teilerfremde Zahlen angenommen werden. Es gibt daher zwei Zahlen $(p^*; q^*)$ in K derart, daß

$$pq^* - p^*q = 1$$

wird. Alsdann führt man das Gitter $(x; y)$ durch die Substitution

$$x = pX + p^*Y\,, \qquad y = qX + q^*Y$$

in ein Zahlgitter $(X\,;\,Y)$ und insbesondere $(p\,;\,q)$ in $(1;\,0)$ und $(r\,;\,s)$ in $(R = q^*r - p^*s;\ E = ps - rq)$ über.

An Stelle des konvexen Körpers (9) tritt alsdann

$$|\,XE - RY\,| + |\,Y\,| \leqq |\,E\,|\,. \tag{11}$$

Ist jetzt z. B. $E = 1 + 3\sqrt{2}\,i$, so gibt es

$$19\left(1 - \frac{1}{19}\right) = 18$$

inkongruente Reste nach diesem Primideal $(1 + 3\sqrt{2}\,i)$.

Ein vollständiges Restsystem bilden die Zahlen:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 1 \pm \sqrt{2}\,i,\ \pm 2 \pm \sqrt{2}\,i,\ \pm (3 + \sqrt{2}\,i)\,.$$

Nun ist mit $(r;\,s)$ auch $(R;\,E)$ teilerfremd, d. h. R muß nach dem Modul E einem dieser Reste kongruent sein. Wählt man $Y = 1$, so kann man daher eine ganze Zahl X in K so bestimmen, daß

$$|\,XE - R\,| + 1 < \sqrt{19}$$

wird, d. h. der Gitterpunkt $(X;\,1)$ liegt im Innern des konvexen Körpers (11) und daher erst recht im Innern des M-Körpers, im Widerspruch zu seiner Definition.

In analoger Weise schließt man alle noch möglichen Werte von E aus bis auf die Zahlwerte

a) $E = 1$,
b) $E = \sqrt{2}\,i$, $\quad R \equiv 1 \pmod{\sqrt{2}\,i}$,
c) $E = 1 \pm \sqrt{2}\,i$, $\quad R \equiv \pm 1 \pmod{1 \pm \sqrt{2}\,i}$,
d) $E = 2$, $\quad R \equiv 1 + \sqrt{2}\,i \pmod{2}$.

§ 3. Untersuchung von $E = 1$.

Sind $(p;\,q)$ und $(r;\,s)$ zwei nicht assoziierte Gitterpunkte auf der Oberfläche des vierfachen M-Körpers derart, daß

$$E = ps - rq = 1$$

ist, so transformiere man das Zahlgitter $(x;\,y)$ unimodular durch

$$x = pX + rY, \qquad y = qX + sY$$

in das Gitter $(X;\,Y)$. Hierbei gehen $(p,\,q)$ und $(r,\,s)$ über in $(1,\,0)$ resp. $(0,\,1)$. Gleichzeitig wird die Funktion $\varphi\,(x,\,y)$ übergeführt in eine Funktion $\Phi\,(X,\,Y)$. Bezeichnet man mit c eine positive Konstante, so hat $c\,\varphi\,(x,\,y)$ mit $\varphi\,(x,\,y)$ die Eigenschaften (1) — (5); daher kann die Normierung der Funktion so vorgenommen werden, daß der M-Körper (7) zu einem Eichkörper

$$\varphi\,(x,\,y) \leqq 1 \quad \text{resp.} \quad \Phi\,(X,\,Y) \leqq 1$$

und gleichzeitig

$$\Phi\,(1,\,0) = 1 \quad \text{und} \quad \Phi\,(0,\,1) = 1 \tag{12}$$

wird. Andererseits muß für jedes ganzzahlige Wertepaar $(G,\,H)$ aus K die Ungleichung

$$\Phi(G, H) \geqq 1, \quad (G, H) \neq (0, 0) \tag{13}$$

bestehen. Der Kernpunkt der weiteren Untersuchung liegt *im Nachweis der Rückführbarkeit der unendlich vielen Ungleichungen* (13) *auf endlich viele unter ihnen*, die alsdann einer geometrischen Untersuchung unterzogen werden können.

Satz 2: Es lassen sich die unendlich vielen Ungleichungen (13) mit Rücksicht auf das Bestehen der beiden Gleichungen (12) auf die 34 folgenden unter ihnen zurückführen.

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \Phi(\varepsilon; 1) \geqq 1, \\
&\text{b)} \quad \Phi(\sqrt{2}\,i; \varepsilon) \geqq 1, \quad \Phi(\varepsilon; \sqrt{2}\,i) \geqq 1 \\
&\text{c)} \quad \Phi(\varepsilon; 1 \pm \sqrt{2}\,i) \geqq 1, \quad \Phi(1 \pm \sqrt{2}\,i; \varepsilon) \geqq 1 \\
&\text{d)} \quad \Phi[1 + \sqrt{2}\,i; \varepsilon(1 - \sqrt{2}\,i)] \geqq 1, \quad \Phi[1 - \sqrt{2}\,i; \varepsilon(1 + \sqrt{2}\,i)] \geqq 1 \\
&\text{e)} \quad \Phi(\varepsilon\sqrt{2}\,i; 1 \pm \sqrt{2}\,i) \geqq 1, \quad \Phi(1 \pm \sqrt{2}\,i;\ \varepsilon\sqrt{2}\,i) \geqq 1 \\
&\text{f)} \quad \Phi(2\varepsilon; 1 \pm \sqrt{2}\,i) \geqq 1, \quad \Phi(1 \pm \sqrt{2}\,i,\ 2\varepsilon) \geqq 1,
\end{aligned} \tag{14}$$

wobei $\varepsilon = \pm 1$ sein kann.

Durch dieses System (14) sind alle Ungleichungen (13) gewährleistet, für welche G und H zugleich dem Betrage nach $\leqq \sqrt{3}$ sind. Wegen der Symmetrie der Bedingungsungleichungen können wir vereinfachend annehmen, es sei

$$|H| \geqq |G|. \tag{15}$$

A. Zunächst sei $|H| \geqq 4$. Wegen (15) ist $\frac{G}{H}$ ein Punkt im Innern oder auf der Peripherie des Einheitskreises. Aus der Funktionalungleichung (4) ergibt sich

$$\Phi(X; Y) \leqq \Phi(X - \frac{G}{H}Y; 0) + \Phi\left(\frac{G}{H}Y; Y\right)$$

$$= \left|X - \frac{G}{H}Y\right| \Phi(1; 0) + \left|\frac{Y}{H}\right| \Phi(G; H) = \left|X - \frac{G}{H}Y\right| + \left|\frac{Y}{H}\right| \Phi(G; H).$$

Wäre jetzt, trotz dem Bestehen der Ungleichungen (14), $\Phi(G; H) < 1$, so würde demnach für beliebiges $(X; Y)$

$$\Phi(X; Y) < \left|X - \frac{G}{H}Y\right| + \left|\frac{Y}{H}\right|. \tag{16}$$

Dies führt aber für einen beliebigen Punkt $\frac{G}{H}$ des Einheitskreises auf einen Widerspruch mit einer der Ungleichungen (13).

Erteilt man $(X; Y)$ nacheinander die Werte

$$(0; 1), \quad (\pm 1; 1), \quad (\pm\sqrt{2}\,i; 1), \quad (\pm 1 \pm \sqrt{2}\,i; 2),$$

so folgt aus (16), daß für $\frac{G}{H}$ die Ungleichungen

$$\frac{3}{4} < \left|\frac{G}{H}\right| \leqq 1, \quad \left|\pm 1 - \frac{G}{H}\right| > \frac{3}{4},$$

$$\left|\pm\sqrt{2}i - \frac{G}{H}\right| > \frac{3}{4}, \quad \left|\pm 1 \pm \sqrt{2}i - 2\frac{G}{H}\right| > \frac{1}{2}$$

zugleich bestehen müßten. Diese Kreisschar überdeckt den Einheitskreis lückenlos und daher könnte $\frac{G}{H}$ nicht im Innern des Einheitskreises liegen; somit ist beim Bestehen der Ungleichungen (14) und für $|H| \geqq 4$ niemals $\Phi(G, H) < 1$, d. h. es ist stets $\Phi(G, H) \geqq 1$.

B. Die noch zu erledigenden Fälle $\sqrt{3} < |H| < 4$ diskutiert man am besten einzeln.

§ 4. Untersuchung von $E = \sqrt{2}\,i$.

Bezeichnen jetzt $(p; q)$ und $(r; s)$ zwei nichtassoziierte Gitterpunkte der Oberfläche des vierfachen M-Körpers, für die

$$E = ps - rq = \sqrt{2}\,i$$

wird, so folgt aus ihrer Teilerfremdheit

$$p + r \equiv 0 \quad \text{und} \quad q + s \equiv 0 \quad (\text{mod. } \sqrt{2}\,i).$$

Führt man durch

$$X = \frac{xs - yr}{\sqrt{2}\,i} = \frac{U}{\sqrt{2}\,i}, \quad Y = \frac{-xq + yp}{\sqrt{2}\,i} = \frac{V}{\sqrt{2}\,i}$$

ein neues Zahlgitter ein, so entsprechen den Gitterpunkten $(x; y)$ die Gitterpunkte $(X; Y)$ und auch die Punkte mit gebrochenen Koordinaten von der Form $\left(\frac{U}{\sqrt{2}\,i}; \frac{V}{\sqrt{2}\,i}\right)$, worin $U; V$ ganze Zahlen in K bedeuten, die zugleich der Zahl 1 nach $\sqrt{2}\,i$ kongruent sind.

Zu den Gitterpunkten $(X; Y)$ kommen demnach noch die Punkte $\left(X + \frac{1}{\sqrt{2}\,i}; \quad Y + \frac{1}{\sqrt{2}\,i}\right)$ hinzu. Alsdann definiert

$$\Phi(X; Y) \leqq 1$$

einen vierfachen Eichkörper, wenn

$$\Phi(1; 0) = 1, \quad \Phi(0; 1) = 1 \tag{17}$$

ist und für jedes ganzzahlige Wertpaar $(G; H)$ gilt

$$\Phi(G; H) \geqq 1, \quad (G; H) \neq (0, 0), \tag{18}$$

$$\Phi\left(G + \frac{1}{\sqrt{2}\,i}; \quad H + \frac{1}{\sqrt{2}\,i}\right) \geqq 1\,. \tag{19}$$

Satz 3: Es lassen sich die unendlich vielen Ungleichungen (18) und (19) mit Rücksicht auf das Bestehen der Gleichungen (17) durch die folgenden 18 unter ihnen völlig ersetzen:

(20)
a) $\Phi(\varepsilon, 1) \geqq \sqrt{2}$,
b) $\Phi(\varepsilon, 1 \pm \sqrt{2}i) \geqq \sqrt{2}$, $\quad \Phi(1 \pm \sqrt{2}i; \varepsilon) \geqq \sqrt{2}$,
c) $\Phi[1 + \sqrt{2}i; \varepsilon(1 - \sqrt{2}i)] \geqq \sqrt{2}$, $\quad \Phi[1 - \sqrt{2}i; \varepsilon(1 + \sqrt{2}i)] \geqq \sqrt{2}$,
d) $\Phi(\varepsilon, \sqrt{2}i) \geqq 1$, $\quad \Phi(\sqrt{2}i, \varepsilon) \geqq 1$,

wobei $\varepsilon = \pm 1$ ist.

In § 3 ist gezeigt worden, daß die unendlich vielen Ungleichungen (18) aus dem System (14) vollständig folgen. Wir brauchen deswegen nur nachzuweisen, daß aus dem System (20) sämtliche Ungleichungen (14) hervorgehen, was sich unmittelbar ergibt.

Setzt man zur Abkürzung

$$U = G\sqrt{2}i + 1, \qquad V = H\sqrt{2}i + 1,$$

so ist weiter nachzuweisen, daß eine Ungleichung

$$\Phi(U; V) < \sqrt{2} \tag{21}$$

auf einem Widerspruch mit dem System (20) führt.

Wegen der Symmetrie dürfen wir $|V| \geqq |U|$ voraussetzen und außerdem $|V| > \sqrt{3}$ annehmen.

A. Ist $|V| \geqq 4$ und gilt die Ungleichung (21), so sind die Voraussetzungen für die zu (16) analoge Ungleichung

$$\Phi(X; Y) < \left| X - \frac{U}{V} Y \right| + \left| \frac{Y}{V} \right| \sqrt{2}$$

gegeben. Erteilt man $(X; Y)$ nacheinander die Werte

$$(0; 1), \quad (\pm 1; 1), \quad [\pm (1 \pm \sqrt{2}i); 1], \quad (\pm 1; \sqrt{2}i),$$

so verlangt diese Ungleichung, daß $\frac{U}{V}$ zugleich

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{4} < \left| \frac{U}{V} \right| \leqq 1; \qquad \left| \pm 1 - \frac{U}{V} \right| > 1;$$

$$\left| \pm (1 \pm \sqrt{2}i) - \frac{U}{V} \right| > 1; \qquad \left| \pm 1 - \frac{U}{V} \sqrt{2}i \right| > \frac{1}{2}$$

genüge leiste. Diese Bereiche überdecken den Einheitskreis vollständig und daher kann (21) niemals statthaben.

B. Die Fälle $4 > |V| > \sqrt{3}$ sind einzeln zu untersuchen.

§ 5. Untersuchung von $E = 1 + \sqrt{2}i$.

Die Diskussion von $E = 1 - \sqrt{2}i$ kann auf den Fall $E = 1 + \sqrt{2}i$ zurückgeführt werden. Sind (p, q) und (r, s) je teilerfremde ganze Zahlen in K, für welche

$$\varphi(p, q) = \varphi(r, s) = 1$$

und zugleich

$$E = ps - rq = 1 + \sqrt{2}i$$

ist, so ist entweder

$$p \equiv r, \quad s \equiv q \quad \text{oder} \quad p \equiv -r, \quad s \equiv -q \pmod{E}.$$

Wenn notwendig ersetzt man gleichzeitig y durch $(-y)$, Y durch $(-Y)$ und p, r, q, s durch $p, -r, -q, s$, so daß man stets

$$p + r \equiv s + q \equiv 0 \pmod{E}$$

annehmen darf. Führt man durch

$$X = \frac{sx - ry}{1 + \sqrt{2}\,i} = \frac{U}{1 + \sqrt{2}\,i}, \qquad Y = \frac{-qx + py}{1 + \sqrt{2}\,i} = \frac{V}{1 + \sqrt{2}\,i}$$

ein neues Zahlgitter ein, so hat man zu den Gitterpunkten $(X; Y)$ noch die Punkte $\left(X \pm \frac{1}{1 + \sqrt{2}\,i};\quad Y \pm \frac{1}{1 + \sqrt{2}\,i}\right)$ hinzuzunehmen.

Alsdann definiert

$$\Phi(X; Y) \leqq 1$$

einen Eichkörper, wenn

$$\Phi(0; 1) = 1, \qquad \Phi(1; 0) = 1, \tag{22}$$

$$\Phi(G; H) \geqq 1 \quad \text{bei} \quad (G; H) \neq (0, 0), \tag{23}$$

$$\Phi\left(G + \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{2}\,i};\quad H + \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{2}\,i}\right) \geqq 1, \quad \varepsilon = \pm 1 \tag{24}$$

gelten.

Satz 4: Der Inhalt der unendlich vielen Ungleichungen (23) und (24) wird, mit Rücksicht auf (22), bereits durch die folgenden 10 besonderen unter ihnen erschöpft:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} & \Phi(1; 1) \geqq \sqrt{3}, & \Phi(-1; 1) \geqq 1, \\
\text{b)} & \Phi(-1; \sqrt{2}\,i) \geqq \sqrt{3}, & \Phi(\sqrt{2}\,i; -1) \geqq \sqrt{3}, \\
\text{c)} & \Phi(-1; 1 - \sqrt{2}\,i) \geqq \sqrt{3}, & \Phi(1 - \sqrt{2}\,i; -1) \geqq \sqrt{3}, \\
\text{d)} & \Phi(\sqrt{2}\,i; 1 - \sqrt{2}\,i) \geqq \sqrt{3}, & \Phi(1 - \sqrt{2}\,i;\ \sqrt{2}\,i) \geqq \sqrt{3}, \\
\text{e)} & \Phi(-1; 2) \geqq \sqrt{3}, & \Phi(2; -1) \geqq \sqrt{3}.
\end{array} \tag{25}$$

Die Ungleichungen (20) erweisen sich als eine Folge dieser Ungleichungen (25) und daher folgen aus letzteren alle Ungleichungen (23). Man setze

$$U = G\,(1 + \sqrt{2}\,i) + \varepsilon, \quad V = H\,(1 + \sqrt{2}\,i) + \varepsilon; \quad \varepsilon = \pm 1,$$

und wähle $|V| \geqq |U|$.

A. Ist $|V| \geqq 3$, so folgt aus (4) für einen im Einheitskreis gelegenen Punkt $\frac{U}{V}$

$$\Phi(X; Y) \leqq \left| X - \frac{U}{V}\,Y \right| + \left| \frac{Y}{V} \right| \Phi(U; V).$$

Wäre für ein solches (U, V)

$$\Phi(U; V) < \sqrt{3}, \tag{26}$$

so müßte

$$\Phi(X; Y) < \left| X - \frac{U}{V}\,Y \right| + \left| \frac{Y}{V} \right| \sqrt{3}$$

sein. Setzt man hierin für (X, Y) einen der Werte

$$(0; 1), \quad (\pm 1; 1), \quad (-1; \sqrt{2}\,i), \quad (\sqrt{2}\,i; -1),$$
$$(-1; 1 - \sqrt{2}\,i), \quad (1 - \sqrt{2}\,i; -1), \quad (\sqrt{2}\,i; 1 - \sqrt{2}\,i), \quad (1 - \sqrt{2}\,i; \sqrt{2}\,i), \quad (-1; 2),$$

so erhält man für $\frac{U}{V}$ ein System von Ungleichungen. Die hierdurch für (U, V) ausgeschlossenen Bezirke überdecken den Einheitskreis, und daher kann (26) nicht gelten.

B. Die Fälle $V = 2\sqrt{2}i,\ 2+\sqrt{2}i,\ 2$ erledigen sich leicht.

§ 6. Untersuchung von $E = 2$.

Sind $(p; q)$ und $(r; s)$ nicht assoziierte Gitterpunkte, für welche

$$\varphi(p; q) = 1, \quad \varphi(r; s) = 1, \quad E = ps - rq = 2$$

ist, so bestimme man zwei ganze Zahlen $(p^*; q^*)$ in K derart, daß

$$pq^* - p^*q = 1$$

wird. Durch die Transformation

$$x = pX + p^*Y, \quad y = qX + q^*Y$$

geht das Gitter $(x; y)$ über in ein Zahlgitter (X, Y) und zwar wird speziell $(p; q)$ in $(1; 0)$ und $(r; s)$ in $(R = q^*r - p^*s;\ E = 2)$ übergeführt. Infolge der Teilerfremdheit von $(r; s)$ ist entweder

$$R \equiv 1 \quad \text{oder} \quad R \equiv 1 + \sqrt{2}i \pmod 2.$$

Der erstere Fall führt auf $E = 1$ zurück; demnach kann

$$R = q^*r - p^*s \equiv 1 + \sqrt{2}i \pmod 2$$

angenommen werden. Durch die Substitution

$$x = pX + rY, \quad y = qX + sY$$

erhalten wir ein neues Gitter, in dem außer (X, Y) noch die Punkte

$$\left[X + \frac{\sqrt{2}i}{2};\ Y + \frac{\sqrt{2}i}{2}\right],$$

$$\left[X + \frac{1+\sqrt{2}i}{2};\ Y + \frac{1}{2}\right] \text{ und } \left[X + \frac{1}{2};\ Y + \frac{1+\sqrt{2}i}{2}\right]$$

Gitterpunkte sind.

Demnach definiert $\Phi(X; Y) \leqq 1$, nur dann einen Eichkörper, wenn gilt

$$\Phi(0; 1) = 1, \quad \Phi(1; 0) = 1, \tag{27}$$

$$\Phi(G; H) \geqq 1, \quad (G; H) \neq (0, 0), \tag{28}$$

wo $(G; H)$ ganze Zahlen in K darstellen, und

$$\Phi\left(G + \frac{\sqrt{2}i}{2};\ H + \frac{\sqrt{2}i}{2}\right) \geqq 1, \tag{29}$$

$$\Phi\left(G + \frac{1+\sqrt{2}i}{2};\ H + \frac{1}{2}\right) \geqq 1, \tag{30}$$

$$\Phi\left(G + \frac{1}{2};\ H + \frac{1+\sqrt{2}i}{2}\right) \geqq 1. \tag{31}$$

Satz 5: Mit Rücksicht auf die Gleichungen (27) kann das System von unendlich vielen Ungleichungen (28)—(31) durch die folgenden 10 besonderen unter ihnen erschöpfend dargestellt werden:

$$\text{(32)}\qquad \begin{array}{ll} \text{a)} & \Phi(\varepsilon;1) \geqq 2, \\ \text{b)} & \Phi(\varepsilon;1 \pm \sqrt{2}i) \geqq 2, \quad \Phi(1 \pm \sqrt{2}i;\ \varepsilon) \geqq 2, \end{array}$$

wobei $\varepsilon = \pm 1$ ist.

Man beweist leicht, daß das System (20) eine Folge von (32) ist, und daher auch die unendlich vielen Ungleichungen (28)—(29). Um zu zeigen, daß auch (30)—(31) aus (32) sich ergeben, bezeichnet man mit $(U;V)$ ein Zahlenpaar in K, so daß die eine Zahl in bezug auf 2 der Zahl 1 und die andere der Zahl $(1+\sqrt{2}i)$ kongruent wird. Außerdem sei $|V| \geqq |U|$, alsdann ergibt sich aus (4) die Ungleichung:

$$\Phi(X;Y) \leqq \left| X - \frac{U}{V} Y \right| + \left| \frac{Y}{V} \right| \Phi(U;V).$$

A. Ist $|V| \geqq 3$ und wäre alsdann

$$\text{(33)}\qquad \Phi(U;V) < 2,$$

so würde

$$\text{(34)}\qquad \Phi(X;Y) < \left| X - \frac{U}{V} Y \right| + 2 \left| \frac{Y}{V} \right|.$$

Gibt man $(X;Y)$ die Werte

$$(0;1), \quad (\pm 1;1), \quad (\pm 1 \pm \sqrt{2}i;1), \quad (1;\pm 1 \pm \sqrt{2}i),$$

so folgen aus (34) Ungleichungen die besagen, daß $\frac{U}{V}$ nicht im Innern des Einheitskreises liegen, daher (33) niemals erfüllt sein kann.

B. Wenn $V = 1 \pm \sqrt{2}i$ ist, muß $U \equiv 1 \pmod 2$ sein, daher ist $U = \pm 1$ und somit schon in (32) berücksichtigt.

§ 7. Genaues Minimum der Linearformen.

Nach (8) ist es im Körper $\sqrt{2}i$ möglich, ganze Zahlen $(x;y)$ so zu wählen, daß

$$\max.\left\{ |\xi|;\ |\eta| \right\} < \sqrt[4]{\frac{32}{\pi^2}} \sqrt{|\Delta|}$$

wird. Da diese obere Grenze nicht erreicht wird, stellen wir uns die Aufgabe, die *exakte* obere Schranke zu bestimmen. Um dieses genaue Minimum M von $\max.\{|\xi|;|\eta|\}$ bei beliebig variierenden Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu bestimmen, ermittelt man den größtmöglichen Wert von $\frac{M}{\sqrt{|\Delta|}}$ und weist zugleich dessen Existenz nach.

Multipliziert man die Koeffizienten von ξ, η mit einer positiven Konstante t, so bleibt $\frac{M}{\sqrt{|\Delta|}}$ ungeändert.

Wählt man $t = \frac{1}{M}$ und modifiziert die Bezeichnungen geeignet, so hat

man das Maximum von $\frac{1}{|\Delta|}$ bei beliebig variierenden $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu bestimmen, wobei der konvexe Körper

$$\varphi(x, y) = \max. \{ |\xi|; |\eta| \} \leqq 1 \tag{35}$$

außer dem Nullpunkt keinen weiteren Gitterpunkt im Inneren, wohl aber auf der Oberfläche besitzen darf. Bei festgehaltenem Gitter $(x; y)$ hat man demnach das Volumen des Eichkörpers (35) zu einem Maximum zu machen. Ein solcher Maximal-M-Körper ist notwendig ein *vierfacher M-Körper*, d. h. er enthält auf der Begrenzung sowohl Gitterpunkte, für welche

$|\xi| = 1, \ |\eta| < 1$ ist, als auch solche, für die
$|\xi| < 1, \ |\eta| = 1$ ist.

Es seien $(p; q)$ und $(r; s)$ Oberflächenpunkte des Maximal-M-Körpers, derart, daß für ersteren $|\xi| = 1, \ |\eta| < 1$ und für letzteren $|\xi| < 1, \ |\eta| = 1$ gilt. Durch

$$x = pX + rY, \quad y = q\,Y + sY$$

gehen

$$\xi = \alpha x + \beta y\,, \quad \eta = \gamma x + \delta y$$

über in Ausdrücke der Form

$$\Xi = \lambda(X + \varrho Y), \quad H = \mu(\sigma X + Y) \tag{36}$$

und der Eichkörper wird definiert durch

$$\Phi = \max. \{ |\Xi|; |H| \} \leqq 1\,.$$

Wegen der Festsetzungen bezüglich $(p; q)$ und $(r; s)$, resp. $(1; 0)$ und $(0; 1)$ im neuen Gitter, muß

$$|\lambda| = 1, \quad |\mu| = 1, \quad |\varrho| < 1, \quad |\sigma| < 1 \tag{37}$$

sein, und für die Determinante ergibt sich

$$\lambda\mu(1 - \varrho\sigma) = (\alpha\delta - \beta\gamma)(ps - rq) = \Delta E. \tag{38}$$

Unsere Aufgabe reduziert sich darauf, die komplexen Zahlen ϱ und σ mit absoluten Beträgen kleiner als 1 so zu bestimmen, daß $|1 - \varrho\sigma|$ zu einem Minimum wird, während der konvexe Körper

$$|X + \varrho Y| \leqq 1, \quad |\sigma X + Y| \leqq 1 \tag{39}$$

im Innern, außer dem Nullpunkt, keinen weiteren Gitterpunkt enthält. Für E kommen nur die Werte

$$1, \quad \sqrt{2}\,i, \ 1 + \sqrt{2}\,i, \quad 2$$

in Betracht.

§ 8. Geometrische Diskussion von $E = 1$.

Ist

$$E = ps - rq = 1\,,$$

so reduziert sich (38) auf

$$|1 - \varrho\sigma| = |\Delta|\,.$$

Die Bedingung dafür, daß (39) einen Eichkörper darstellt, wird nach Satz 2 (p. 44) charakterisiert durch ein System von 34 simultanen Ungleichungen. Ver-

nden $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu bestimmen,

$| \leqq 1$

m Inneren, wohl aber auf der
$(x; y)$ hat man demnach das
um zu machen. Ein solcher
-*Körper*, d. h. er enthält auf

lche, für die

s Maximal-M-Körpers, derart,
eren $|\xi| < 1$, $|\eta| = 1$ gilt,

sY

δy

$+ Y)$

1.

$r; s)$, resp. $(1; 0)$ und $(0; 1)$

$|\sigma| < 1$

$) = \Delta E$.

exen Zahlen ϱ und σ mit ab-
$1 - \varrho\sigma|$ zu einem Minimum

$\leqq 1$

itterpunkt enthält. Für E

n $E = 1$.

darstellt, wird nach Satz 2
anen Ungleichungen. Ver-

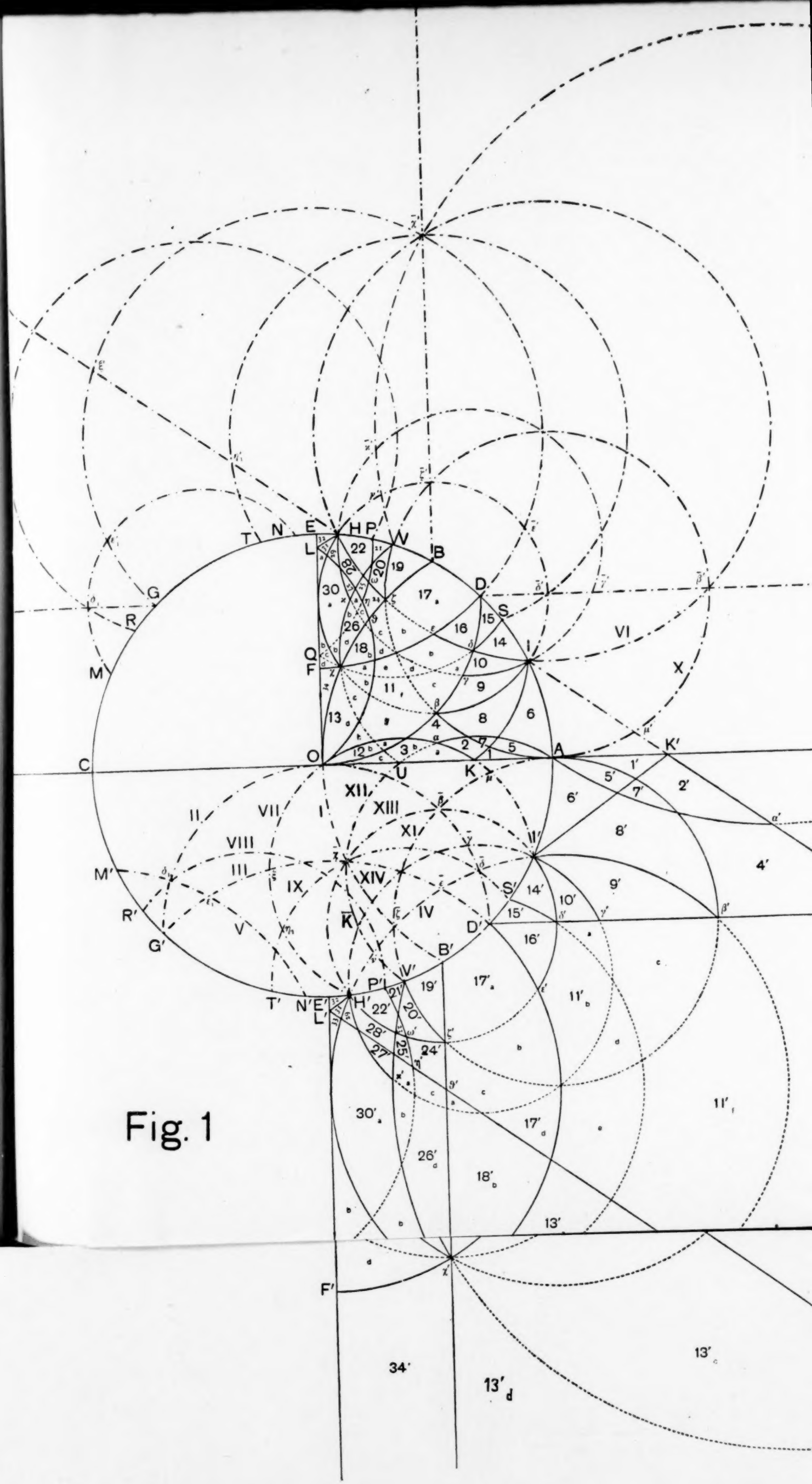
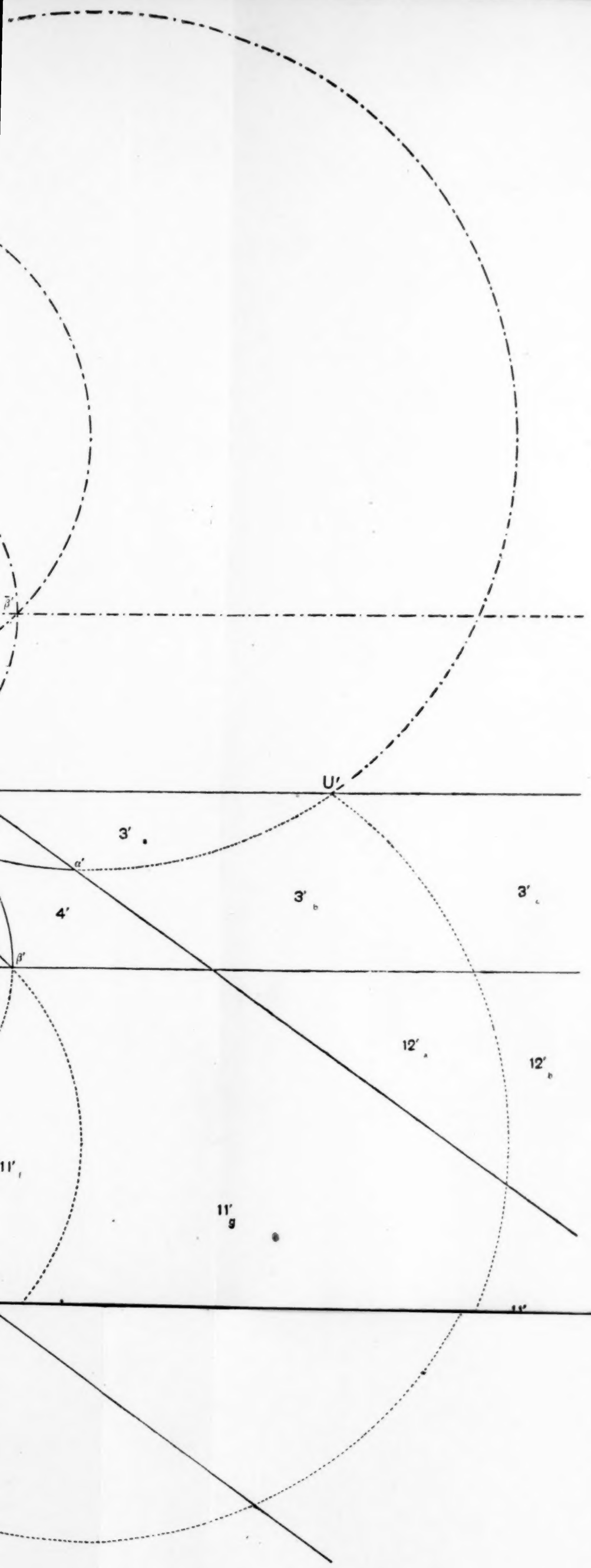
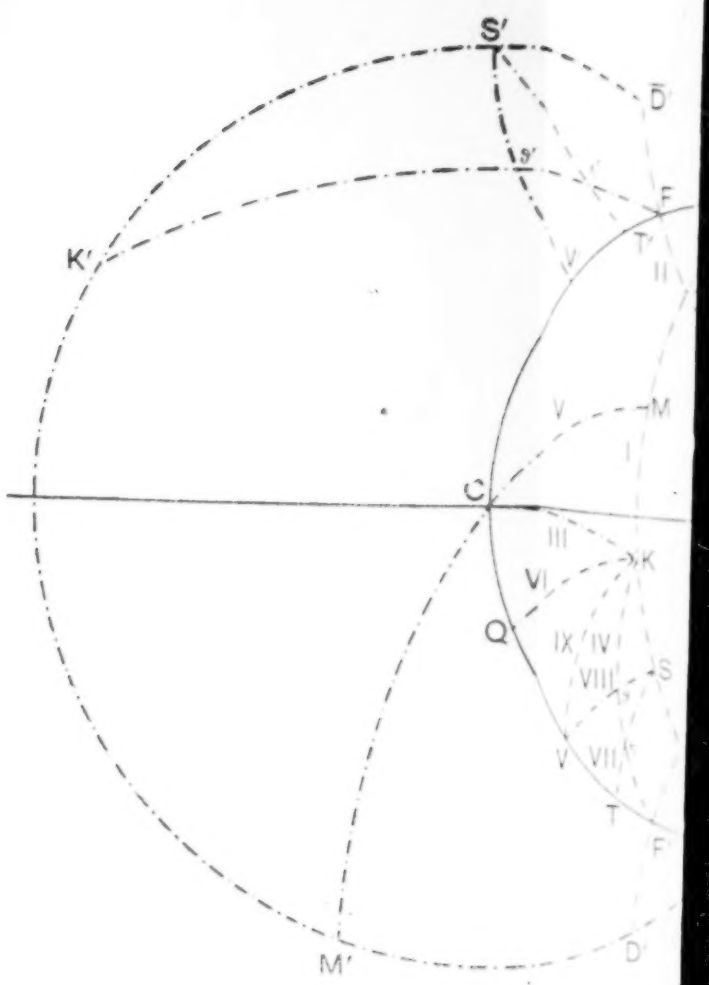


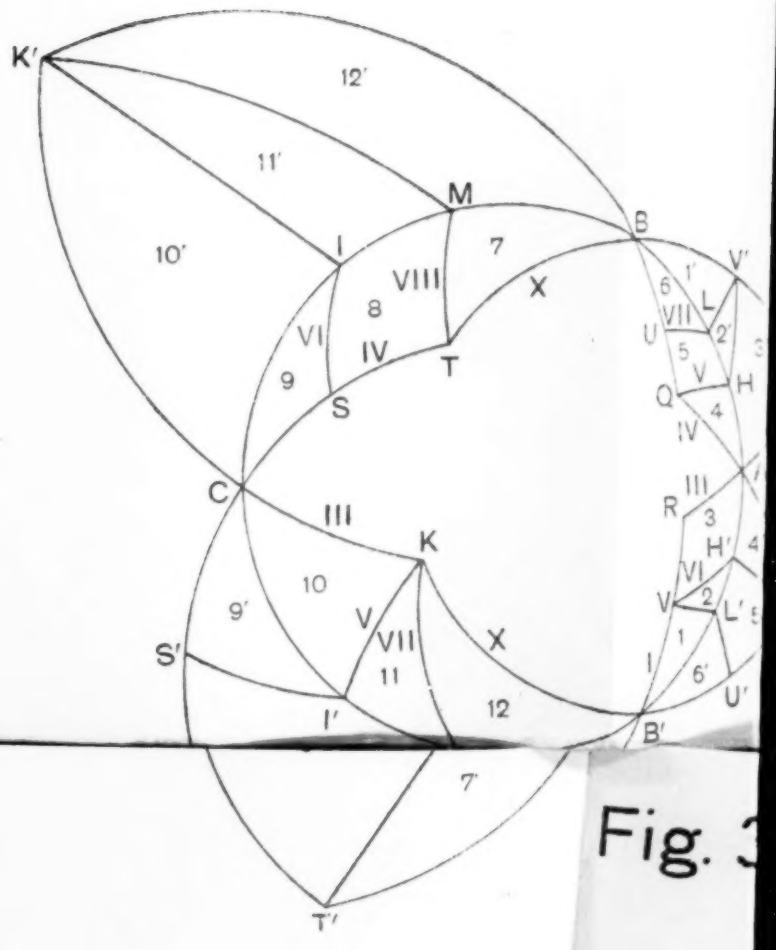
Fig. 1



U'
3'
α'
4'
3'
3'
β'
12'
12'
11'
11'



S'
D'
F
K'
T'
V
II
V
M
C
III
K
VI
Q
IX
IV
VIII
S
V
VII
T
F'
M'
D'



K'
12'
11'
M
B
10'
I
7
VIII
X
8
VI
IV
T
9
S
C
III
K
10
9'
V
VII
X
S'
11
I'
12
7'
T'
B'
V'
L
U
Q
H
IV
R
III
H'
VI
V
L'
I
6'
U'

Fig. 3

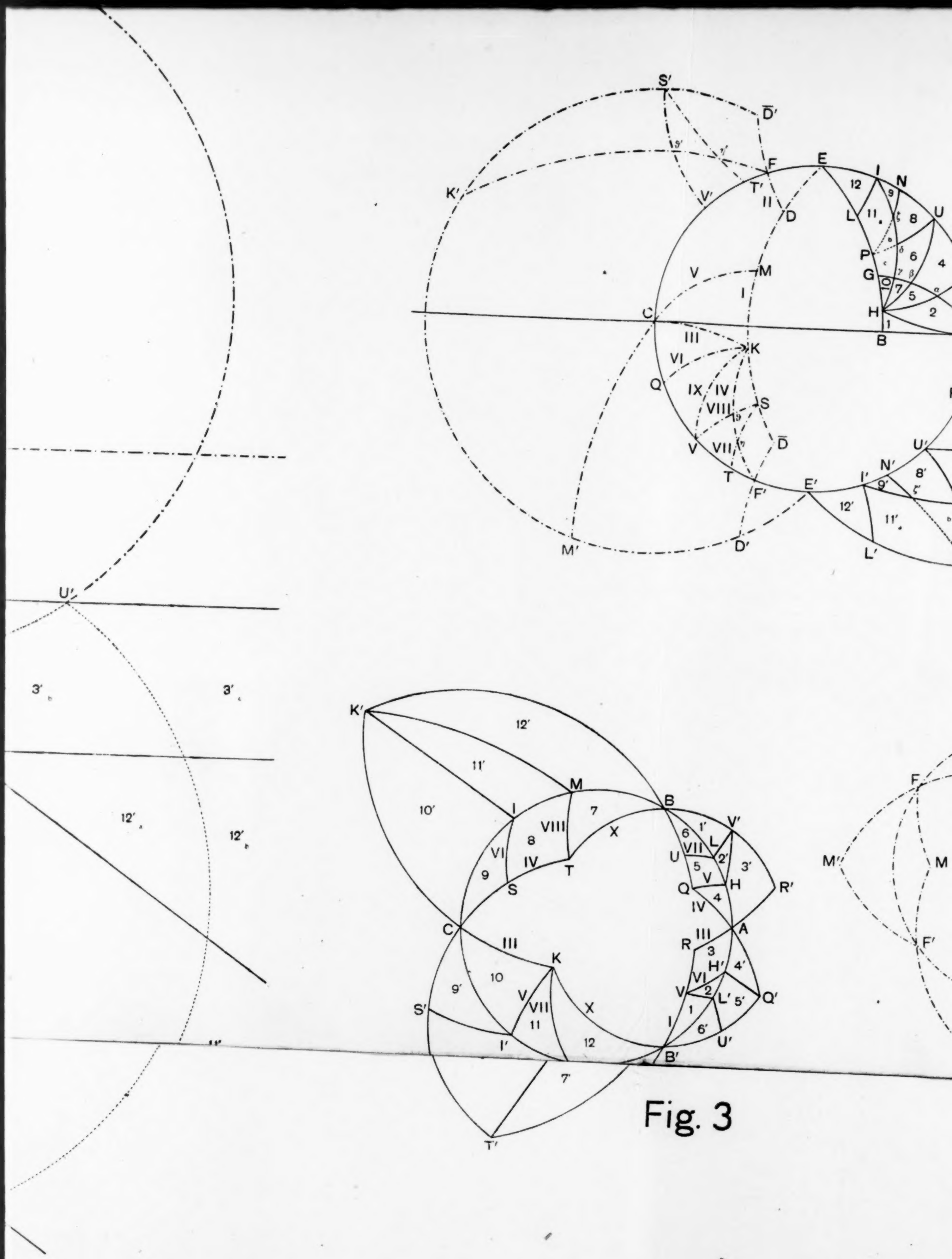

S′
D̄′
K′
F
E
I
N
U
T′
V′
II
D
L
12
11
9
8
P
6
4
G
7
5
H
2
1
B
V
M
I
C
III
K
VI
Q
IX
IV
VIII
S
V
VII
D̄
T
F′
E′
I′
N′
U′
8′
9′
12′
11′
L′
M′
D′
U′
3′
3′
12′
12′
K′
12′
11′
M
10′
I
7
B
VIII
X
8
VI
IV
T
9
S
6
1′
V′
VII
L
U
2′
5
3′
V
Q
H
R′
4
IV
C
III
A
R
III
3
K
H′
4′
10
VI
9′
V
2
L′
5′
Q′
S′
VII
X
1
11
I
6′
I′
12
U′
B′
7′
T′
F
M′
M
F′

Fig. 3

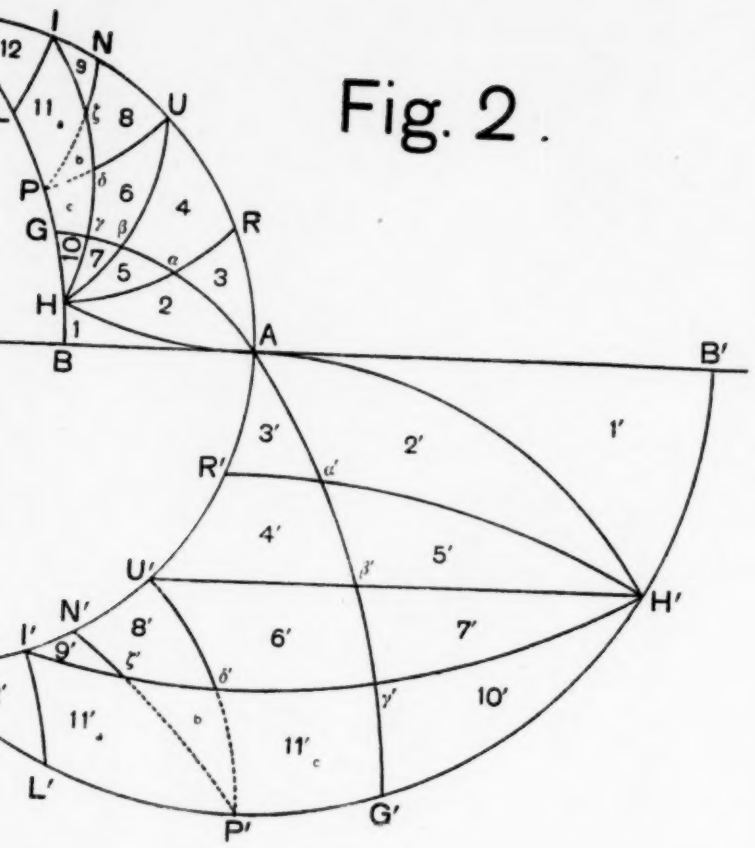

I
N
12
9
11
ζ
8
U
P
δ
6
4
R
G
O
γ
β
7
5
α
3
H
2
1
A
B
B′
3′
2′
1′
R′
α′
4′
5′
U′
β′
H′
N′
I′
8′
6′
7′
9′
ζ′
δ′
γ′
10′
11′
11′
L′
P′
G′

Fig. 2.

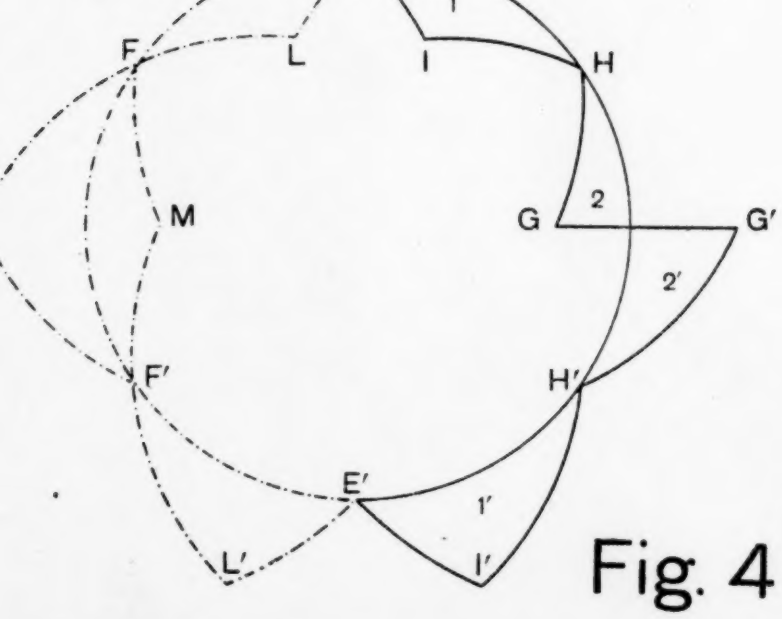

E
1
F
L
I
H
M
G
2
G′
2′
F′
H′
E′
1′
L′
I′

Fig. 4

UNIV. OF MICH.

tauscht man in denselben $(\varrho; \sigma)$ mit $(-\varrho; -\sigma)$, so ändert sich weder $|1-\varrho\sigma|$, noch die Gesamtheit dieser Ungleichungen. Dasselbe gilt aber auch beim Übergang von $(\varrho; \sigma)$ zu den konjugiert komplexen Größen $(\bar{\varrho}; \bar{\sigma})$. Daher ist es erlaubt, ϱ auf den ersten Quadranten der komplexen Ebene zu beschränken. Hierdurch reduzieren sich die 34 Ungleichungen auf die 14 folgenden:

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \max.\{|\varrho-1|;\ |\sigma-1|\} \geqq 1,\\
&\text{b)} \quad \max.\{|\varrho-\sqrt{2}i|;\ |1-\sqrt{2}i\sigma|\} \geqq 1,\\
&\text{c)} \quad \max.\{|\varrho\sqrt{2}i+1|;\ |\sigma+\sqrt{2}i|\} \geqq 1,\\
&\text{d)} \quad \max.\{|+1+\varrho(-1+\sqrt{2}i)|;\ |\sigma+(-1+\sqrt{2}i)|\} \geqq 1,\\
&\text{e)} \quad \max.\{|\pm 1+\varrho(1+\sqrt{2}i)|;\ |\sigma\pm(1+\sqrt{2}i)|\} \geqq 1,\\
(40)\qquad &\text{f)} \quad \max.\{|\varrho-(1+\sqrt{2}i)|;\ |\sigma(1+\sqrt{2}i)-1|\} \geqq 1,\\
&\text{g)} \quad \max.\{|(1\pm\sqrt{2}i)\mp\varrho(1\mp\sqrt{2}i)|;\ |\sigma(1\pm\sqrt{2}i)\mp(1\mp\sqrt{2}i)|\} \geqq 1,\\
&\text{h)} \quad \max.\{|\pm\sqrt{2}i+\varrho(1\mp\sqrt{2}i)|;\ |\pm\sigma\sqrt{2}i+(1\mp\sqrt{2}i)|\} \geqq 1,\\
&\text{i)} \quad \max.\{|(1-\sqrt{2}i)+\varrho\sqrt{2}i|;\ |\sigma(1-\sqrt{2}i)+\sqrt{2}i|\} \geqq 1,\\
&\text{k)} \quad \max.\{|-2+\varrho(1-\sqrt{2}i)|;\ |-2\sigma+(1-\sqrt{2}i)|\} \geqq 1,\\
&\text{l)} \quad \max.\{|(1+\sqrt{2}i)-2\varrho|;\ |\sigma(1+\sqrt{2}i)-2|\} \geqq 1,
\end{aligned}
$$

wobei entweder überall die obern oder die untern Vorzeichen zu nehmen sind.

Dieses System von Ungleichungen verlangt, daß so oft für ein Zahlenpaar $(X; Y)$ sich

$$|X+\varrho Y|<1$$

herausstellt, für dasselbe Wertepaar $(X; Y)$ alsdann

$$|\sigma X+Y| \geqq 1$$

sein muß; d. h. wenn ϱ im Innern eines bestimmten Kreises liegt, so muß σ gleichzeitig im Äußern eines zugeordneten Kreises liegen. Durch diese Kreise erscheint alsdann der erste Quadrant des Einheitskreises in 58 Bezirke, die zu 34 Bereichen zusammengefaßt werden können, aufgeteilt. Hierbei ist zu einem Bereich eine konkave Begrenzung niemals mitzuzählen. Wegen (37) sind auch die Punkte der Einheitskreisperipherie auszuschließen.

Es ist jetzt zu ermitteln, für welche Werte-Kombination $(\varrho; \sigma)$ bei beliebig im ersten Quadranten variierenden ϱ ein Minimum von $|1-\varrho\sigma|$ eintritt. Bei festem $\varrho=\varrho_0$ macht man zunächst $\left|\frac{1}{\varrho_0}-\sigma\right|$ zu einem Minimum. Wegen der einfachen geometrischen Bedeutung dieses Ausdruckes ist es gegeben, die 34 Bereiche durch reziproke Radien am Einheitskreis abzubilden. Ist $\frac{1}{\varrho_0}$ ein fester Punkt in einem dieser Bereiche, so läßt man σ im zugeordneten Gebiet variieren und bestimmt σ so, daß $\left|\frac{1}{\varrho_0}-\sigma\right|$ ein Minimum wird.

In der Figur 1 sind sämtliche Bereiche für ϱ und $\frac{1}{\varrho}$ samt den zugeordneten σ-Bezirken eingezeichnet. Entsprechend den 14 Ungleichungen (40) bezeichnen

wir die Bereiche für ϱ und zugleich die innere Gebietsgrenze für die Variable σ mit I—XIV.

In der folgenden Tabelle A wird für jeden der 58 Bereiche angegeben, in welchem dieser 14 Gebiete der betreffenden ϱ-Bereich liegt. Der Bereich 1 ist demnach enthalten in den Gebieten I, X und XI, daher muß σ zugleich auf der konvexen Seite der Bogen I, X und XI liegen und erscheint daher auf das Kreisbogenviereck $V'\overline{\zeta\chi}0\zeta VCV'$ eingeschränkt. In dieser Weise sind die in der Tabelle A zu einem ϱ-Bereich angegebenen σ-Bereiche zu bestimmen. Der Bereich 2 ist enthalten in den Gebieten I, IV, X und XI. Die letztere Forderung ist aber bereits in I, IV enthalten und fällt darum XI für die Gebietsbegrenzung der Variablen σ außer Betracht, und daher setzen wir in Tabelle A unter XI das Zeichen + statt 0.

Tabelle A.

ϱ Bereiche	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	Zugeordnete σ Bereiche	Minimum von $\left\|\frac{1}{\varrho_0}-\sigma\right\|$ für $\sigma=$	Minimum von $\left\|\frac{1}{\sigma_0}-\varrho\right\|$ für $\varrho=$
1	0									0	0				$V'\bar{\zeta}\bar{\chi}0\zeta V$	$\bar{\zeta}$	
2	0			0						0	+				$H'\nu\bar{\zeta}\bar{\chi}0\zeta V$	„	
3a	0			0		0				+	+				$H'\nu\bar{\zeta}\bar{\chi}0\zeta H$	„	
b	0			0		0					+				„	„	
c	0			0		0									„	„	
4	0			0							+				$H'\nu\bar{\zeta}\bar{\chi}0\zeta B$	„	β
5	0									0	+	0			$V'\nu\bar{\varkappa}\bar{\chi}0\zeta V$	$\bar{\chi}$; ζ	ε ; A
6	0										+	0			$V'\nu\bar{\varkappa}\bar{\chi}0\zeta B$	$\bar{\chi}$; V'	ε ; J
7	0			0						0	+	0			$H'\nu\bar{\varkappa}\bar{\chi}0\zeta V$	$\bar{\chi}$; ν	
8	0			0							+	0			$H'\nu\bar{\varkappa}\bar{\chi}0\zeta B$	$\bar{\chi}$; $\bar{\nu}$	ε ; B, J
9	0			+							+	0		0	$H'\bar{\varkappa}\bar{\chi}0\zeta B$	$\bar{\chi}$; $\bar{\varkappa}$	ε ; γ
10	0			+							+	+	0	+	$H'\bar{\chi}0\zeta B$	$\bar{\chi}$	
11a	0		0	+							+	+	+	+	$G'\varepsilon_1\xi\bar{\chi}0\zeta B$	„	
b	0		0	+					+		+	+	+	+	„	„	ε
c	0		0	+							+	+		+	„	„	
d	0		0	+					+		+	+		+	„	„	
e	0		0	+					+		+			+	„	„	
f	0		0	+							+			+	„	„	
g	0		0	+							+				„	„	
h	0		0	+											„	„	
12a	0		0	+		0					+				$G'\varepsilon_1\xi\bar{\chi}0\zeta H$	„	
b	0		0	+		0									„	$\bar{\chi}$; ζ	
13a	0		0	+	0				+		+			+	$M'\delta_1\varepsilon_1\xi\bar{\chi}0\zeta$	$\bar{\chi}$	
b	0		0	+	0						+			+	„	„	
c	0		0	+	0						+				„	„	
d	0		0	+	0										„	$\bar{\chi}$; ε_1	ε ; χ
14	0			+			0				+	+	+	+	$H'\eta_1\xi0\zeta B$	H'	δ
15	0			+			0		0		+	+	+	+	$T'\eta_1\xi0\zeta B$	η_1	D
16	0		0	+			0		+		+	+	+	+	$G'\varepsilon_1\xi0\zeta B$	ξ	ε
17a	0	0	+	+			+		+		+	+	+	+	$G'\delta_1 0\zeta B$	G'	
b	0	0	+	+					+		+	+	+	+	„	G'	
c	0	0	+	+					+		+		+	+	„	„	ϑ
d	0	0	+	+					+		+			+	„	„	

ϱ Bereiche	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	XI	X	IX	XII	XIII	XIV	Zugeordnete σ Bereiche	Minimum von $\left\|\frac{1}{\varrho_0}-\sigma\right\|$ für $\sigma=$	Minimum von $\left\|\frac{1}{\sigma_0}-\varrho\right\|$ für $\varrho=$
18a	0	0	+	+	0				+		+		+	+	$M'\delta_1 0\zeta B$	δ_1	
b	0	0	+	+	0				+		+			+	„	„	
19		0	+	+			0		+		+	0	+	+	$G'\delta_1 0\alpha A$	α	B
20		0	+	+			0		+		0		+	+	$G'\delta_1 0\alpha K\mu A$	G' ; μ	ω , ζ
21		0	+	+			0		+				+	+	$G'\delta_1 0\alpha K\mu J'$	G' ; J'	ω , V
22		0	+	+			0	0	+				+	+	$R'\delta_1 0\alpha K\mu J'$	J' ; δ_1	
23		0	+	+			0	0	+		0		+	+	$R'\delta_1 0\alpha K\mu A$	μ , δ_1	
24		0	+	+					+		0		+	+	$G'\delta_1 0\bar{\beta}\mu A$	$\bar{\beta}$	ζ
25		0	+	+				0	+		0		+	+	$R'\delta_1 0\bar{\beta}\mu A$	„	
26a		0	+	+	0			+	+		0		+	+	$M'\delta_1 0\bar{\beta}\mu A$	„	
b		0	+	+	0			+	+		0			+	„	„	
c		0	+	+	0				+		0		+	+	„	„	
d		0	+	+	0				+		0			+	„	„	
27		0	+	+	0			+	+				0	+	$M'\delta_1 0\bar{\beta}J'$	$\bar{\beta}$, J'	
28		0	+	+				0	+				0	+	$R'\delta_1 0\bar{\beta}J'$	$\bar{\beta}$, J'	
29		0	+	+				0	+					0	$R'\delta_1 0\bar{\beta}\bar{\gamma}J'$	$\bar{\gamma}$	
30a		0	+	+	0			+	+					0	$M'\delta_1 0\bar{\beta}\bar{\gamma}J'$	$\bar{\gamma}$, δ_1 , J'	$\varkappa$, $\frac{\sqrt{2}i}{2}\chi$
b		0	+	+	0				+					0	„	$\bar{\gamma}$, δ_1 , J'	χ
31		0	+	0				0	+						$R'\delta_1 0\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}J'$	$\bar{\delta}$	
32		0	+					0	0						$R'\delta_1 0\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}S'$	„	
33a		0	+	0	0			+	+						$M'\delta_1 0\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}J'$	„	
b		0	+	0	0			+	+						„	„	
c		0	+	0	0				+						„	„	χ
d		0	+	0	0										„	„	χ
34			0	0	0										$M'\delta_1\varepsilon_1\xi\bar{\chi}\bar{\varepsilon}\bar{\delta}J'$	$\bar{\varepsilon}$	χ

Den Wert $\varrho = 0$ können wir ausschließen, da sich das Minimum von $|1-\varrho\sigma|$ als kleiner als 1 herausstellen wird.

Es sei jetzt $\frac{1}{\varrho_0}$ ein fester Punkt von 1′, d. h. des durch Inversion aus 1 entstandenen Bereiches. σ liegt alsdann in $V'\bar{\zeta}\bar{\chi}0\zeta V$ und die Entfernung der Punkte $\frac{1}{\varrho_0}$ und σ wird möglichst klein, wenn σ auf der Geraden $\left(\sigma;\frac{1}{\varrho_0}\right)$ an $\frac{1}{\varrho_0}$ heranrückt, bis σ mit einem Randpunkt seines Gebietes zusammenfällt. Bewegt sich σ auf dem Bogen $V'\bar{\zeta}$, dessen Zentrum δ' ist, so wird $\left|\frac{1}{\varrho_0}-\sigma\right|$ nur in $\bar{\zeta}$ einen Minimalwert erreichen, ebenso wie auf $V\zeta$ in ζ. Verschieben wir σ auf $\bar{\zeta}\bar{\chi}0\chi\zeta$, einem Kreisbogen mit dem Zentrum in A, so wird der kleinste Wert nur in einem der Endpunkte angenommen, da dieser Punkt A dem Bereiche 1 nicht mehr angehört. Da jeder Punkt $\frac{1}{\varrho}$ von 1′ von $\bar{\zeta}$ einen kleinern oder höchstens gleichen Abstand wie von ζ besitzt, so genügt es, erstere Annahme zu verfolgen (Figur 1).

Durchgeht man in dieser Weise die einzelnen Bereiche, so findet man, daß ein

Minimum von $\left|\frac{1}{\varrho_0} - \sigma\right|$ lediglich eintreten kann, wenn, wie in Tabelle A angegeben, σ in einem der Eckpunkte

$$\bar{\zeta},\ \bar{\chi},\ \zeta,\ \nu,\ \bar{\varkappa},\ \varepsilon_1,\ \eta_1,\ \xi,\ \delta_1,\ \mu,\ \bar{\beta},\ \bar{\gamma},\ \bar{\delta},\ \alpha,\ \bar{\varepsilon}$$

liegt. Eventuell kann eine untere Grenze erreicht werden, wenn σ in einen der Punkte V', H', G' oder J' der Peripherie gelangt.

Bezeichnet σ_0 einen dieser aufgeführten Werte, so bestimmt man denjenigen Wert der Variablen ϱ, welcher den Ausdruck

$$\left|1 - \sigma_0\varrho\right| = \left|\sigma_0\right|\left|\frac{1}{\sigma_0} - \varrho\right|$$

zu einem Minimum macht. Durch Inversion am Einheitskreis bilden wir diese Punkte σ_0 auf das Äußere des Einheitskreises ab. Dabei geht z. B. α in α' über (Figur 1). Ist $\frac{1}{\sigma_0} = \bar{\zeta}'$ und bewegt sich ϱ in den Bereichen $1-4$ (siehe Tabelle A), so tritt ein kleinster Wert von $\left|\frac{1}{\sigma_0} - \varrho\right|$ nur ein für $\varrho = \beta$, einen Punkt des Bereiches 4 (Tabelle A, letzte Kolonne).

Die Diskussion der auf Grund der beiden letzten Kolonnen in Tabelle A noch möglichen Werte-Kombinationen wird etwa folgendermaßen geführt:

Ist $\frac{1}{\varrho_0} = \chi'$ und bewegt sich σ auf dem Bogen IV zwischen J' und $\bar{\varepsilon}$, so ist $\left|\frac{1}{\varrho_0} - \sigma\right|$ für $\sigma = \bar{\varepsilon}$ kleiner, als für $\sigma = J'$ oder $\bar{\delta}$. Variiert σ auf dem Bogen III, so erkennt man, daß $\sigma = \bar{\varepsilon}$ auch einen kleinern Wert ergibt, als $\sigma = \varepsilon_1$. Derart sind 3 Kombinationen zugunsten von $(\chi; \bar{\varepsilon})$ eliminiert.

Durch diese Untersuchungen stößt man auf das Minimum in

$$\varrho = \varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}\,i, \qquad \sigma = \bar{\chi} = \frac{3 - \sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6}\,i$$

im Betrage von

$$\left|1 - \varepsilon\bar{\chi}\right| = \frac{1}{2}\left|\sqrt{6} - 1 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\,i\right| = \underline{\sqrt{3 - \sqrt{6}} = 0{,}74\,196\ldots}$$

Außerdem wird das Minimum im ersten Quadranten noch in $\varrho = \chi$; $\sigma = \bar{\varepsilon}$ angenommen. Heben wir diese Beschränkung auf den ersten Quadranten auf, so können an Stelle dieser Werte auch die dazu assoziierten oder konjugierten Größen treten. Für $\varrho = \varepsilon$, $\sigma = \bar{\chi}$ erhält (36) die Gestalt

$$(41)\qquad \begin{aligned} \Xi &= \lambda\left[X + \left(\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}\,i\right) Y\right], \\ H &= \mu\left[\left(\frac{3 - \sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6}\,i\right) X + Y\right]. \end{aligned}$$

Durch die Substitution $X = X^*$, $Y = -Y^*$ von der Determinante -1 geht (41) über in

$$\Xi = \lambda\,[X^* - \varepsilon Y^*], \qquad H = -\,\mu\,[-\bar{\chi}X^* + Y^*].$$

Durch die Transformation

$$X = X^* + Y^*, \qquad Y = -Y^*$$

geht (41) weiter über in

$$\Xi = \lambda [X^* + \bar{\varepsilon} Y^*], \qquad H = \left(-\frac{3+\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6} i\right) \mu \ [\chi X^* + Y^*],$$

wobei

$$\left| -\frac{3+\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6} i \right| = 1$$

ist. Diese Ausdrücke sind demnach einander arithmetisch äquivalent. Ganz analoge Verhältnisse liegen vor für $\varrho = \chi$, $\sigma = \bar{\varepsilon}$, so daß wir zusammenfassend sagen können, daß im Falle $E = 1$ die Größe $|1 - \varrho\sigma|$ ihr Minimum dann und nur dann erreicht, wenn eine ganzzahlige Substitution von einer Determinante ± 1 existiert, welche die Formen ξ, η in Ausdrücke der Art (41) oder

$$(42) \qquad \begin{aligned} \Xi &= \lambda \left[X + \left(\frac{3-\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6} i \right) Y \right], \\ H &= \mu \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2} i \right) X + Y \right] \end{aligned}$$

überführt und das Minimum von $|\Delta|$ hat den Wert $\sqrt{3-\sqrt{6}}$.

§ 8. Geometrische Diskussion von $E = \sqrt{2}i$.

Es gelten wiederum die Voraussetzungen des § 7, im speziellen sei

$$E = ps - rq = \sqrt{2}i;$$

alsdann reduziert sich die Gleichung (38) auf

$$|1 - \varrho\sigma| = \sqrt{2}\,|\Delta|.$$

Die Bedingung dafür, daß die Ungleichungen (39) einen Eichkörper darstellen wird nach dem Satz 3 charakterisiert durch ein System von 18 simultanen Ungleichungen. Aus denselben Gründen, wie bei $E = 1$ können wir die Variable ϱ auf den ersten Quadranten einschränken. Alsdann verbleiben die 12 Ungleichungen

a) $\max. \{ |\varepsilon + \varrho|;\ |\sigma + \varepsilon| \} \geqq \sqrt{2}$,

b) $\max. \{ |\varepsilon + \varrho(1 \pm \sqrt{2}i)|;\ |\sigma\varepsilon + (1 \pm \sqrt{2}i)| \} \geqq \sqrt{2}$,

c) $\max. \{ |\varrho\varepsilon + (1 - \varepsilon\sqrt{2}i)|;\ |\sigma(1 - \varepsilon\sqrt{2}i) + \varepsilon| \} \geqq \sqrt{2}$,

d) $\max. \{ |(1+\sqrt{2}i) - \varrho(1-\sqrt{2}i)|;\ |\sigma(1+\sqrt{2}i) - (1-\sqrt{2}i)| \} \geqq \sqrt{2}$,

e) $\max. \{ |(1-\sqrt{2}i) + \varrho(1+\sqrt{2}i)|;\ |\sigma(1-\sqrt{2}i) + (1+\sqrt{2}i)| \} \geqq \sqrt{2}$,

f) $\max. \{ |\sqrt{2}i - \varrho|;\ |\sigma\sqrt{2}i - 1| \} \geqq 1$,

g) $\max. \{ |1 + \varrho\sqrt{2}i|;\ |\sigma + \sqrt{2}i| \} \geqq 1$,

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist.

Auf Grund der Ungleichung a) kann man den Variabilitätsbereich von ϱ sogar auf das Kreisbogendreieck ABE einschränken (Figur 2). Bei dieser neuen Verkleinerung des ϱ-Bereiches fallen zwei der 4 Ungleichungen b) weg.

Durch die verbleibenden 9 Ungleichungen wird das Dreieck ABE in 14 Bereiche zerfällt (Figur 2).

Um das Minimum von $|1-\varrho\sigma|$ zu bestimmen, hält man ϱ fest und variiert σ. Hierzu ist es zweckmäßig, die ϱ-Bereiche durch Inversion am Einheitskreis abzubilden (Figur 2). Die den 9 Ungleichungen entsprechenden ϱ-Bereiche werden mit I—IX bezeichnet, ebenso die zugeordneten Gebietsgrenzen der Variablen σ.

Die Tabelle B enthält die Verteilung der 14 Bereiche auf die 9 Gebiete und erlaubt, die zugeordneten σ-Bezirke zu bestimmen. Einrichtung und Verwendung sind dieselbe wie bei Tabelle A.

Tabelle B.

ϱ Bereiche	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Bereich der Variablen σ	Minimum von $\left\|\frac{1}{\varrho_0}-\sigma\right\|$ für $\sigma=$	Minimum von $\left\|\frac{1}{\sigma_0}-\varrho\right\|$ für $\varrho=$
1	0	0								$F\,D\,M\,K\,S\,\bar{D}\,F'\,C$	$\bar{D}$	H
2	0	0		0						$F\,D\,M\,K\,\vartheta\,\eta\,F'\,C$	$D,\ K,\ F'$	$H, -, H$
3	0			0						$E\,D\,M\,K\,\vartheta\,\eta\,F'\,C$	$K,\ F'$	
4	0			0			0			$E\,D\,M\,K\,\vartheta\,\eta\,T\,C$	$K,\ \eta$	$-, U$
5	0	0		0			0			$F\,D\,M\,K\,\vartheta\,\eta\,T\,C$	$K,\ \eta$	$-, H$
6	0			0			+	0		$E\,D\,M\,K\,\vartheta\,V\,C$	ϑ	δ
7	0	0		0			+	0		$F\,D\,M\,K\,\vartheta\,V\,C$	$K,\ \vartheta$	
8	0			+			+	+	0	$E\,D\,M\,K\,V\,C$	K, V	$-,\ \zeta$
9	0			+		0	+	+	+	$E\,D\,M\,K\,Q\,C$	K	
10	0	0	0	+			+	+		$F\,D\,M\,K\,C$	K	
11a	0		0	+		+	+	+	+	$E\,D\,M\,K\,C$	K	L
b	0		0	+			+	+	+	„	K	
c	0		0	+			+	+		„	K	
12	0		+	+	0	+	+	+	+	$E\,D\,M\,C$	M	L

Durchgeht man die 14 Bereiche, so findet man, daß ein Minimum von $\left|\frac{1}{\varrho_0}-\sigma\right|$ nur eintreten kann, wenn σ in einem der in Tabelle B unter Minimum von $\left|\frac{1}{\varrho_0}-\sigma\right|$ aufgeführten Punkte sich befindet. Diese Punkte bildet man durch Inversion am Einheitskreis ab (Figur 2) und bestimmt für diese Werte σ_0 das Minimum von $\left|\frac{1}{\sigma_0}-\varrho\right|$. Unter den in Tabelle B angegebenen Wertekombinationen $(\sigma;\varrho)$ findet sich alsdann das Minimum in

$$\sigma=\bar{D}=\frac{2-\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}\,i}{2},\qquad \varrho=H=\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}\,i$$

und zwar ist

$$|1-\varrho\sigma|=|1+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,i|=\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{6}}.$$

Auf Grund der Relation (43) ergibt sich als Minimalwert der Determinante

$$|\Delta| = \frac{|1-\varrho\sigma|}{\sqrt{2}} = \sqrt{3-\sqrt{6}},$$

genau derselbe Betrag wie im Falle $E = 1$.

Hebt man die Beschränkung von ϱ auf den ersten Quadranten auf, so wird dieses Minimum erreicht, wenn $\sigma = \overline{D}$, $\varrho = H$ oder $\sigma = K$, $\varrho = L$ oder wenn $(\sigma; \varrho)$ die hierzu assoziierten oder konjugierten Werte annimmt. Die durch diese Wertsysteme erzeugten Formen $(\Xi; H)$ sind aber untereinander und den Ausdrücken (42) arithmetisch äquivalent.

§ 10. Geometrische Diskussion von $E = 1 + \sqrt{2}\,i$.

Es seien $(p; q)$ und $(r; s)$ Gitterpunkte auf der Oberfläche eines maximalen M-Körpers, für welche die Determinante

$$E = ps - rq = 1 + \sqrt{2}\,i$$

sein soll. Nach (38) ist dann

$$|1 - \varrho\sigma| = \sqrt{3}\,|\Delta|.$$

Auf Grund des Satzes 4 umschließt der konvexe Körper

$$|X + \varrho Y| \leqq 1, \qquad |X\sigma + Y| \leqq 1$$

außer dem Nullpunkt keinen weiteren Gitterpunkt $(X; Y)$, noch einen Punkt $\left[X + \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}\,i};\ \ Y + \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}\,i}\right]$, wobei $\varepsilon = \pm 1$, wenn die folgenden 10 Ungleichungen Geltung haben:

I. $\max.\{|\varrho + 1|; |\sigma + 1|\} \geqq \sqrt{3}$,

II. $\max.\{|\varrho - 1|; |\sigma - 1|\} \geqq 1$,

III. $\max.\{|\varrho\sqrt{2}i - 1|; |\sigma - \sqrt{2}i|\} \geqq \sqrt{3}$,

IV. $\max.\{|\varrho - \sqrt{2}i|; |\sigma\sqrt{2}i - 1|\} \geqq \sqrt{3}$,

V. $\max.\{|\varrho(1 - \sqrt{2}i) - 1|; |\sigma - (1 - \sqrt{2}i)|\} \geqq \sqrt{3}$,

VI. $\max.\{|\varrho - (1 - \sqrt{2}i)|; |\sigma(1 - \sqrt{2}i) - 1|\} \geqq \sqrt{3}$,

VII. $\max.\{|\varrho\sqrt{2}i + (1 - \sqrt{2}i)|; |\sigma(1 - \sqrt{2}i) + \sqrt{2}i|\} \geqq \sqrt{3}$,

VIII. $\max.\{|\varrho(1 - \sqrt{2}i) + \sqrt{2}i|; |\sigma\sqrt{2}i + (1 - \sqrt{2}i)|\} \geqq \sqrt{3}$,

IX. $\max.\{|2\varrho - 1|; |\sigma - 2|\} \geqq \sqrt{3}$,

X. $\max.\{|\varrho - 2|; |2\sigma - 1|\} \geqq 3$.

Die Ungleichungen III und IV erlauben, das Kreiszweieck $A\,Q\,T\,S\,C\,K\,R$, und die Ungleichungen I und IX, das Kreiszweieck $B\,U\,Q\,R\,V\,B'\,K\,T$ aus dem zulässigen Bereich der Variablen ϱ auszuscheiden (Figur 3).

Die durch die Ungleichung II ausgedrückte Forderung ist vollständig enthalten in den Bedingungen I, IX, und X. Der für ϱ zulässige Bereich zerfällt in 12 Bezirke (Figur 3). Das Ergebnis der Diskussion ist in der Tabelle C enthalten.

Tabelle C.

ϱ Bereiche	I	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	ϱ Bereiche	Minimum von $\left\|\frac{1}{\varrho_0}-\sigma\right\|$ für $\sigma=$	Minimum von $\left\|\frac{1}{\sigma_0}-\varrho\right\|$ für $\varrho=$
1		0			+		+	+	0	*C K B′*	*K*, *B′*	–, *V*
2		0			+	0	+	+	+	*C K M′*	*K*	
3		0		0	+	+	+	+	+	*C K J′*	*K*	*R*
4			0	+	0	+	+	+	+	*C S J*	*S*	*Q*
5			0	+		+	0	+	+	*C S T M*	*T*	*Q*
6			0	+		+		+	0	*C S T B*	*T*, *B*	–, *U*
7	0		+	+		0				*B U L*	*U*	*T*, *B*
8	0		+	0						*B U Q H*	*Q*	*T*
9	0		0							*B U Q A*	*Q*	
10	0	0								*A R V B′*	*R*	*K*
11	0	+			0					*H′ V B′*	*V*	*K*
12	0	+			0		0			*L′ V B′*	*V*	*K*, *B′*

Unter diesen noch möglichen Kombinationen von $(\varrho;\sigma)$ ergibt sich das Minimum für

$$\varrho = R = \frac{\sqrt{6}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\,i, \qquad \sigma = K = \frac{3-2\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}\,i$$

und zwar ist dann

$$\left|1-\varrho\sigma\right| = \frac{1}{2}\left|(5-\sqrt{6})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,i\right| = \sqrt{3}\sqrt{3-\sqrt{6}}.$$

so daß wiederum

$$|\Delta| = \sqrt{3-\sqrt{6}}$$

sich herausstellt, ebenso wie die Formen

$$(44)\qquad \begin{aligned} \Xi &= \lambda\left[X + \left(\frac{\sqrt{6}-1}{2} - \frac{3-\sqrt{2}}{2}\,i\right)Y\right], \\ H &= \mu\left[\left(\frac{3-2\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}\,i\right)X + Y\right] \end{aligned}$$

sich mit den assoziierten oder konjugierten Ausdrücken als arithmetisch äquivalent erweisen. Durch die Substitution

$$X = X^* + Y^*\,\frac{1+2\sqrt{2}\,i}{3}, \qquad Y = Y^*\,\frac{1-\sqrt{2}\,i}{3}$$

geht (44) über in (41), abgesehen von einem Faktor vom Betrage 1.

§ 11. Geometrische Diskussion von $E = 2$.

Endlich seien (p, q) und (r, s) Oberflächenpunkte eines maximalen M-Körpers derart, daß

$$E = ps - rq = 2$$

wird, alsdann ist

$$|1-\varrho\sigma| = 2\,|\Delta|.$$

Der konvexe Körper (39) stellt nach Satz 5 einen maximalen M-Körper dar, wenn die 10 Ungleichungen

a) $\max. \{ | \varrho + \varepsilon | ; \ | \sigma + \varepsilon | \} \geqq \sqrt{2}$,

b) $\max. \{ | \varepsilon + \varrho(1 \pm \sqrt{2}i) | ; \ | \sigma + \varepsilon(1 \pm \sqrt{2}i) | \} \geqq 2$,

c) $\max. \{ | \varrho + \varepsilon(1 \pm \sqrt{2}i) | ; \ | \sigma(1 \pm \sqrt{2}i) + \varepsilon | \} \geqq 2$,

wobei $\varepsilon = \pm 1$ ist, bestehen.

Diese Ungleichungen erlauben es, wieder ϱ auf den ersten Quadranten und daselbst insbesondere auf die Kreisbogendreiecke EJH und HGA zu verweisen (Fig. 4).

Die Variable σ befindet sich alsdann in ELF resp. FMF'. Das Minimum von $| 1 - \varrho\sigma |$ tritt ein für

$$\varrho = G = \frac{\sqrt{10} - 1}{3}, \qquad \sigma = M = -\frac{\sqrt{10} - 1}{3};$$

alsdann ist

$$\left| 1 - \varrho\sigma \right| = \frac{2}{9} \left| 10 - \sqrt{10} \right| = 1{,}519\ldots$$

und

$$| \Delta | = \frac{1}{2} \left| 1 - \varrho\sigma \right| = \frac{10 - \sqrt{10}}{9} = 0{,}7597\ldots$$

Das Minimum ist demnach größer als

$$\sqrt{3 - \sqrt{6}} = 0{,}74196\ldots$$

in den bisherigen Fällen. Es ist aber zu beachten, daß wir den Fall $E = 2$ zur Untersuchung in zwei Unterfälle zerlegt haben, je nachdem

$$R \equiv 1 \quad \text{oder} \quad R \equiv 1 + \sqrt{2}i \ \text{(mod. 2)}$$

war (pg. 48). Der erstere dieser Unterfälle führt aber auf $E = 1$ zurück, während im zweiten Falle das Minimum $\sqrt{3 - \sqrt{6}}$ nicht erreicht wird.

§ 12. Zusammenfassung.

In § 1 ist gezeigt worden, daß in den zwei Linearformen

$$\xi = \alpha x + \beta y, \qquad \eta = \gamma x + \delta y$$

die Variablen sich stets so als ganze Zahlen im Körper $\sqrt{2}i$ bestimmen lassen, daß die Beträge $| \xi |$, $| \eta |$ zugleich kleiner werden als $\sqrt[4]{\frac{32}{\pi^2}} \sqrt{| \Delta |}$. Nunmehr kann als Ergebnis der Untersuchung nach dem genauen Grenzwert ausgesprochen werden:

Satz 6. Sind

$$\xi = \alpha x + \beta y, \qquad \eta = \gamma x + \delta y$$

zwei lineare Formen in den komplexen Variablen x, y mit beliebigen komplexen Koeffizienten und einer von Null verschiedenen Determinante

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

so gibt es stets ganze Zahlen x, y im Körper $\sqrt{2}i$, die nicht beide zugleich verschwinden, derart, daß zugleich

$$|\xi| \leqq \sqrt[4]{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}\,|\sqrt{\Delta}|, \quad |\eta| \leqq \sqrt[4]{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}\,|\sqrt{\Delta}|$$

wird. Im allgemeinen lassen sich die ganzen Zahlen x, y so bestimmen, daß diese Beziehungen mit den Ungleichheitszeichen erfüllt sind; eine Ausnahme bildet nur der Fall, daß ξ, η durch eine ganzzahlige Substitution in $K(\sqrt{2}i)$ von der Determinante ± 1 in die Formen

$$\sqrt[4]{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}\,|\sqrt{\Delta}|\,e^{i\omega_1}\left[X+\left(\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\,i\right)Y\right];$$

$$\sqrt[4]{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}\,|\sqrt{\Delta}|\,e^{i\omega_2}\left[X\left(\frac{3-\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}\,i\right)+Y\right]$$

überführbar sind; hierin bedeuten ω_1, ω_2 reelle Größen.

Hieraus ergibt sich eine Anwendung, die einem in der rationalen Zahlentheorie oft benützten Satze analog ist:

Zu einer beliebigen komplexen Größe $\varkappa$ und einer beliebigen ganzen, positiven Zahl t, läßt sich mindestens ein Paar von ganzen Zahlen x, y des Körpers $\sqrt{2}i$, letztere mit einem absoluten Betrage kleiner als t, derart angeben, daß

$$|x-\varkappa y| < \frac{1}{t}\sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}$$

wird. Hiermit ist ein Quotient $\frac{x}{y}$ zweier ganzer Körperzahlen gefunden, der die beliebige Größe $\varkappa$ besser approximiert als

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}\;\frac{1}{|y|^2}.$$

MAR 13 1926

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schäfer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 155.

Heft 2.

Ausgegeben den 5. Februar

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG · J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1926

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 155. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

Beck, H., Über konforme Transformationen im Raume I. . . . . Seite 61

Wiegandt, Gertrud, Zur natürlichen Geometrie einer zehngliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene . . . . . — 75

Stammler, Gerhard, Elementare Betrachtungen über den Aufbau von Zahlverknüpfungen nach Gesetzen. (2. Note). . . . . — 93

Rédei, L., Ein neuer Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes . . . . — 103

Hensel, Kurt, Über Potenzreihen von Matrizen . . . . . — 107

Arwin, A., Einige periodische Kettenbruchentwicklungen . . . . . — 111

Berichtigung zu der Arbeit **„Eine Axiomatisierung der Mengenlehre“** von J. v. Neumann in Bd. 154 . . . . . — 128

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Über konforme Transformationen im Raume I.

Von *H. Beck* in Bonn.

Will man konforme Geometrie im Raume treiben, so hat man einen *eigentlichen* Punkt durch *fünf* homogene Koordinaten darzustellen, zwischen denen eine quadratische Gleichung und eine lineare Ungleichheit besteht. Die uneigentlichen Punkte des projektiven Kontinuum sind zu streichen, an ihre Stelle treten ∞^2 nicht eigentliche „akzessorische" Punkte, die dadurch erklärt werden, daß man die Ungleichheit fallen läßt. Die quadratische Form auf der linken Seite der Gleichung hat den *Rang fünf*; will man Realitätsverhältnissen gebührend Rechnung tragen, so hat man ihr den *Trägheitsindex eins* beizulegen.

Habe der eigentliche Punkt die *Kartesischen* Koordinaten (ξ, η, ζ). Dann sind ihm die konformen Koordinaten beizulegen

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 : 2\xi : 2\eta : 2\zeta : 1 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2.$$

Jede andere Darstellung zeigt gewisse Übelstände. Es ist

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0, \tag{7}$$

und außerdem $x_0 + x_4 \neq 0$. Die Umkehrungsformeln lauten

$$\xi = \frac{x_1}{x_0 + x_4}, \qquad \eta = \frac{x_2}{x_0 + x_4}, \qquad \zeta = \frac{x_3}{x_0 + x_4}.$$

Im Falle $x_0 + x_4 = 0$ stellen die x einen akzessorischen Punkt dar. Für diesen habe ich folgende Deutung gegeben[1]):

Verschwinden nicht gleichzeitig auch x_1, x_2, x_3, so soll dem akzessorischen Punkte zugeordnet werden die Minimalebene

$$-x_0 + x_1\xi + x_2\eta + x_3\zeta = 0,$$

wenn aber $x_0 + x_4 = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ist, so soll als Bild dieses „*singulären*" akzessorischen Punktes die uneigentliche Ebene dienen.

Auf diese Weise wird die konforme Geometrie in die einfachste Beziehung zur *Euklidi*schen Geometrie gesetzt[2]).

Das so erklärte konforme Punktkontinuum ist damit auf eine singularitätenfreie quadratische dreidimensionale Mannigfaltigkeit M_3^2 des vierdimensionalen Raumes abgebildet, *und die konformen Transformationen gehen dabei über in die*

[1]) Auf der Marburger Mathematikertagung 1923.

[2]) Näheres darüber in The Tohôku Mathematical Journal **24**, (1925).

automorphen Kollineationen dieser M_3^2, deren Gleichung durch (7) geliefert wird, wenn man die x als homogene Punktkoordinaten im R_4 deutet.

Damit ist die algebraische Seite des Problems der konformen Transformationen gekennzeichnet: es handelt sich darum, *alle eigentlichen* (diese genügen) *linearen Substitutionen zu suchen, die die quadratische Form*

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$$

in sich überführen.

In sehr eleganter Weise hat diese Aufgabe, sogar viel allgemeiner, *Frobenius* gelöst [1]).

Sei S die Matrix der quadratischen Form, $\tilde{S}$ die konjugierte Matrix ($\tilde{S} = S$). Aus den Veränderlichen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ bilde ich die singuläre Matrix X, in der alle Spalten außer der ersten mit Nullen besetzt sind. Dann ist $\tilde{X}SX$ die quadratische Form, eine lineare Substitution schreibt sich $X' = UX$, und sie führt die Form S über in $\tilde{U}^{-1}SU^{-1}$. Sei weiter $h \neq 0$. Aus

$$(hS + T)(hS - T)^{-1} S (hS + T)^{-1} (hS - T) = P,$$
$$(hS + T)(hS - T)^{-1} T (hS + T)^{-1} (hS - T) = Q$$

folgt, wenn man die erste Gleichung mit h multipliziert, und dann die zweite addiert bzw. subtrahiert

$$P = S, \quad Q = T.$$

Setzt man jetzt noch die Matrix T als schief symmetrisch voraus, ($\tilde{T} = -T$), so hat man in

$$U = (hS - T)^{-1}(hS + T)$$

eine lineare Substitution der Form S in sich:

$$X' = (hS - T)^{-1}(hS + T)\, X$$

Nun sagt *Frobenius* [2]), daß so *nicht alle* (eigentlichen) Substitutionen dieser Art gefunden werden, auch nicht, wenn man h gegen Null konvergieren läßt. Das ist nur bedingt richtig. Ich behaupte, daß in der nur wenig abgeänderten Formel

$$(hS - T)\, X' = (hS + T)\, X$$

sie sämtlich vorhanden sind, soweit sie eigentlich sind.

Meine Abänderung in der Schreibweise zeigt, daß die *Frobenius*sche Lösung unfertig ist. Daher rührt auch ihre Eleganz.

Es sind jetzt nämlich noch n Systeme von linearen Gleichungen zu lösen, und diese gehören zu jenen, für welche die in der Cramerschen Regel auftretenden Determinanten einen Faktor gemeinsam haben. Damit ist aber der Matrizenkalkül am Ende seiner Kraft angelangt, das Problem ist streng genommen *nicht* erledigt; der Grenzübergang zu $h \to 0$ ist *Frobenius* nicht gelungen.

Weiter geführt hat dann *Lipschitz* die Aufgabe [3]). Ziemlich unwesentlich ist, daß er S als Einheitsmatrix voraussetzt. *Seine Ausführungen geben de facto*

---

[1]) *Crelles* Journal 84, (1878).

[2]) S. 48.

[3]) Untersuchungen über die Summen von Quadraten. Bonn 1886.

eine Methode zur Lösung solcher pathologischen Systeme, obwohl ihm die Einsicht in diesen Sachverhalt fehlte (diese Behauptung läßt sich beweisen!). Er hat dann seine Ergebnisse in kurze Formeln gebracht unter Benutzung gewisser Systeme komplexer Zahlen, — ähnlich später *Vahlen* [1]). Letzterer kommt mit einer Formel aus; *Lipschitz* braucht deren 2^{n-1}, wo n die Anzahl der Quadrate seiner Form ist. Beide Autoren haben aber ein ungeeignetes Zahlsystem zugrunde gelegt.

Etwas besser ist der Lösungsversuch von *Cartan* [2]) gelungen. Indessen ist er nur scheinbar zu einer einheitlichen Formel gelangt; er benutzt nämlich ein Zeichen, welches in verschiedenen Bedeutungen gebraucht wird, in wievielen, wissen wir nicht zu sagen; in dem hier vorliegenden Falle ($n = 5$) sind es vier (*Jede konforme Transformation im Raume läßt sich als Aufeinanderfolge von höchstens vier Inversionen darstellen*).

Sieht man von den hinreichend bekannten Fällen $n = 2, 3, 4$ ab, so kommt man mit $n = 5$ gerade zu unserm Problem. Dieser Fall nimmt gegenüber den folgenden eine gewisse Ausnahmestellung ein.

Wir werden zu einer einheitlichen Darstellung

$$\dot{\mathfrak{A}} \cdot \dot{x}' = \dot{x} \cdot \dot{\mathfrak{A}}$$

der konformen Transformationen gelangen, mit Hilfe eines Systems komplexer Zahlen in *sechzehn* Einheiten. Mit diesem System läßt sich alles bewältigen, was die Geometer an Transformationsgruppen bisher beschäftigt hat. Man braucht zur Darstellung der konformen Transformationen dann *sechzehn homogene* [3]) *Parameter*, die *zehn* quadratischen Gleichungen genügen. *Aus irgend elf dieser Parameter lassen sich die übrigen fünf eindeutig ermitteln*; trotzdem kann man nicht mit elfen auskommen. Äußerst merkwürdig ist, daß sich die Zahl der quadratischen Bedingungen auf *fünf* reduzieren läßt.

Im ersten Abschnitt wollen wir lediglich die algebraische Seite der Angelegenheit behandeln. — Eine *invariante* Darstellung der konformen Transformationen mit den Hilfsmitteln der *Aronhold*schen (bzw. Komplex-)Symbolik wird die Dissertation von *Frl. Fröhlich* bringen.

§ 1.

Die lineare Substitution

$$x_j' = c_{jt} x_t \qquad (j, t = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

(*Einsteinsche* Bezeichnung) habe den Eigenwert -1 nicht, d. i. die charakteristische Gleichung soll keine Wurzel -1 haben.

Dann läßt sich das System

$$x_j' + x_j = x_j + c_{jt} x_t \tag{2}$$

---

[1]) Math. Ann. 55 (1902). *Vahlen* liefert, genau genommen, einen Existenzbeweis.

[2]) Franz. Enzykl. I. 5. Nombres complexes. S. 464—465.

[3]) „Die Ausführungen auf S. 43—48 meiner Arbeit enthalten aber eine dringende Warnung an die Geometer, sich mit dem homogen machen zu begnügen. Dies liefert nur zufällig für $n = 3$ *alle* Substitutionen von S in sich, nicht aber für $n > 3$." (*Frobenius* an den Verf. am 14. März 1913). Daraufhin hatte Verf. damals das Problem liegen lassen.

eindeutig nach den x insofern auflösen, als sich diese linear und homogen durch die $x' + x$ ausdrücken.

Schreibt man demgemäß

$$2\gamma_0 x_j = \gamma_0(x'_j + x_j) - \gamma_{jt}(x'_t + x_t), \qquad (\gamma_0 \neq 0) \tag{3}$$

so ist die Determinante von Null verschieden

$$\begin{vmatrix} \gamma_0 - \gamma_{00} & -\gamma_{01} & -\gamma_{02} & -\gamma_{03} & -\gamma_{04} \\ -\gamma_{10} & \gamma_0 - \gamma_{11} & -\gamma_{12} & -\gamma_{13} & -\gamma_{14} \\ -\gamma_{20} & -\gamma_{21} & \gamma_0 - \gamma_{22} & -\gamma_{23} & -\gamma_{24} \\ -\gamma_{30} & -\gamma_{31} & -\gamma_{32} & \gamma_0 - \gamma_{33} & -\gamma_{34} \\ -\gamma_{40} & -\gamma_{41} & -\gamma_{42} & -\gamma_{43} & \gamma_0 - \gamma_{44} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4}$$

Wegen

$$2x_j = (x'_j + x_j) - (x'_j - x_j)$$

wird ferner

$$\gamma_0(x'_j - x_j) = \gamma_{jt}(x'_t + x_t) \tag{5}$$

und hieraus folgt

$$\gamma_0 x'_j - \gamma_{jt} x'_t = \gamma_0 x_j + \gamma_{jt} x_t. \tag{6}$$

Die Determinante in (4) ist zugleich die Resultante der links stehenden Linearformen. Man kann also (6) nach den x' auflösen, und erhält die Formeln (1), wo die c_{jt} jetzt durch die γ ausgedrückt sind. In dieser Weise erhält man alle linearen Substitutionen, die den Eigenwert -1 nicht haben. Ist umgekehrt das System (6) mit der Bedingung (4) gegeben, so lassen sich alle Schritte rückwärts vollziehen: die Substitution (6) hat den Eigenwert -1 nicht.

§ 2.

Die lineare Substitution (6), (4) soll jetzt die quadratische Form

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \tag{7}$$

in sich selbst überführen. Multipliziert man die Gleichungen (5) mit

$$(x'_0 + x_0), \quad -(x'_1 + x_1), \quad -(x'_2 + x_2), \quad -(x'_3 + x_3), \quad -(x'_4 + x_4)$$

und addiert, so erhält man als notwendige und hinreichende Bedingungen

$$\gamma_{jj} = 0, \quad \gamma_{0i} = \gamma_{i0}, \quad \gamma_{kl} = -\gamma_{lk} \qquad (i, k, l = 1, 2, 3, 4), \tag{8}$$

und die Determinante in (4) nimmt den Wert an

$$\gamma_0 N(\gamma),$$

wo

$$\begin{aligned} N(\gamma) = \gamma_0^4 + \gamma_0^2(&-\gamma_{01}^2 - \gamma_{02}^2 - \gamma_{03}^2 - \gamma_{04}^2 + \gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 + \gamma_{14}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{24}^2 + \gamma_{34}^2) \\ &+ (\gamma_{12}\gamma_{34} + \gamma_{13}\gamma_{42} + \gamma_{14}\gamma_{23})^2 \\ &- (\gamma_{02}\gamma_{34} + \gamma_{03}\gamma_{42} + \gamma_{04}\gamma_{23})^2 - (\gamma_{01}\gamma_{34} + \gamma_{03}\gamma_{41} + \gamma_{04}\gamma_{13})^2 \\ &- (\gamma_{01}\gamma_{24} + \gamma_{02}\gamma_{41} + \gamma_{04}\gamma_{12})^2 - (\gamma_{01}\gamma_{23} + \gamma_{02}\gamma_{31} + \gamma_{03}\gamma_{12})^2 \end{aligned} \tag{9}$$

ein Aggregat von Quadraten ist.

Jede lineare Substitution der quadratischen Form (7) in sich, die den Eigenwert -1 nicht hat, läßt sich so darstellen, umgekehrt gibt das System (5) mit den Bedingungen (8) für $\gamma_0 N(\gamma) \neq 0$ immer eine lineare Substitution der quadratischen Form (7) in sich, die den Eigenwert -1 nicht hat.

Spuren des dem Bisherigen zugrunde liegenden Gedankens, der bei *Lipschitz* eingehend ausgeführt ist, lassen sich bis auf *Hermite* zurückverfolgen.

§ 3.

Ich ändere jetzt die Bezeichnung und setze

$$(10)\quad \gamma_0 = \mathfrak{A},\quad \gamma_{0i} = \gamma_{i0} = \mathfrak{A}_{i0} = -\mathfrak{A}_{0i},\quad \gamma_{kl} = -\gamma_{lk} = \mathfrak{A}_{kl} = -\mathfrak{A}_{lk}.$$

Ferner kürze ich fünf *Pfaffsche* Aggregate ab:

$$(11)\quad \begin{aligned}
&\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{34} - \mathfrak{A}_{13}\mathfrak{A}_{42} - \mathfrak{A}_{14}\mathfrak{A}_{23} = 0,\\
&\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_{02}\mathfrak{A}_{34} + \mathfrak{A}_{03}\mathfrak{A}_{42} + \mathfrak{A}_{04}\mathfrak{A}_{23} = 0,\\
&\mathfrak{A}\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_{01}\mathfrak{A}_{34} - \mathfrak{A}_{03}\mathfrak{A}_{41} - \mathfrak{A}_{04}\mathfrak{A}_{13} = 0,\\
&\mathfrak{A}\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_{01}\mathfrak{A}_{24} + \mathfrak{A}_{02}\mathfrak{A}_{41} + \mathfrak{A}_{04}\mathfrak{A}_{12} = 0,\\
&\mathfrak{A}\mathfrak{A}_4 - \mathfrak{A}_{01}\mathfrak{A}_{23} - \mathfrak{A}_{02}\mathfrak{A}_{31} - \mathfrak{A}_{03}\mathfrak{A}_{12} = 0.
\end{aligned}$$

Die hierdurch neu eingeführten Größen $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$ genügen noch den weiteren fünf Gleichungen

$$(12)\qquad \mathfrak{A}_{jt}\mathfrak{A}_t = 0,$$

(wenn man $\mathfrak{A}_{jj} = 0$ setzt), ein Punkt, der von entscheidender Wichtigkeit wird. Aus $N(\gamma)$ wird jetzt $\mathfrak{A}^2 N(\mathfrak{A})$, wo

$$(13)\quad \begin{aligned}
N(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}^2 &- \mathfrak{A}_{01}^2 - \mathfrak{A}_{02}^2 - \mathfrak{A}_{03}^2 - \mathfrak{A}_{04}^2 + \mathfrak{A}_{12}^2 + \mathfrak{A}_{13}^2 + \mathfrak{A}_{14}^2 + \mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{24}^2 + \mathfrak{A}_{34}^2\\
&+ \mathfrak{A}_0^2 - \mathfrak{A}_1^2 - \mathfrak{A}_2^2 - \mathfrak{A}_3^2 - \mathfrak{A}_4^2
\end{aligned}$$

gesetzt ist. Das System (6), (8) lautet dann so:

$$(14)\quad \begin{aligned}
\mathfrak{A}\ x_0' + \mathfrak{A}_{01}x_1' + \mathfrak{A}_{02}x_2' + \mathfrak{A}_{03}x_3' + \mathfrak{A}_{04}x_4' &= \mathfrak{A}\ x_0 - \mathfrak{A}_{01}x_1 - \mathfrak{A}_{02}x_2 - \mathfrak{A}_{03}x_3 - \mathfrak{A}_{04}x_4,\\
\mathfrak{A}_{01}x_0' + \mathfrak{A}\ x_1' - \mathfrak{A}_{12}x_2' - \mathfrak{A}_{13}x_3' - \mathfrak{A}_{14}x_4' &= -\mathfrak{A}_{01}x_0 + \mathfrak{A}\ x_1 + \mathfrak{A}_{12}x_2 + \mathfrak{A}_{13}x_3 + \mathfrak{A}_{14}x_4,\\
\mathfrak{A}_{02}x_0' + \mathfrak{A}_{12}x_1' + \mathfrak{A}\ x_2' - \mathfrak{A}_{23}x_3' - \mathfrak{A}_{24}x_4' &= -\mathfrak{A}_{02}x_0 - \mathfrak{A}_{12}x_1 + \mathfrak{A}\ x_2 + \mathfrak{A}_{23}x_3 + \mathfrak{A}_{24}x_4,\\
\mathfrak{A}_{03}x_0' + \mathfrak{A}_{13}x_1' + \mathfrak{A}_{23}x_2' + \mathfrak{A}\ x_3' - \mathfrak{A}_{34}x_4' &= -\mathfrak{A}_{03}x_0 - \mathfrak{A}_{13}x_1 - \mathfrak{A}_{23}x_2 + \mathfrak{A}\ x_3 + \mathfrak{A}_{34}x_4,\\
\mathfrak{A}_{04}x_0' + \mathfrak{A}_{14}x_1' + \mathfrak{A}_{24}x_2' + \mathfrak{A}_{34}x_3' + \mathfrak{A}\ x_4' &= -\mathfrak{A}_{04}x_0 - \mathfrak{A}_{14}x_1 - \mathfrak{A}_{24}x_2 - \mathfrak{A}_{34}x_3 + \mathfrak{A}\ x_4,
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{A} \neq 0,\qquad N(\mathfrak{A}) \neq 0.$$

§ 4.

Dieses zu lösende System gehört nun zu denen, für welche die in der Cramerschen Regel auftretenden Determinanten einen Faktor gemeinsam haben; es ist ein schiefes System in der Sprache *Cayleys*.

Demgemäß behandelt es *Lipschitz* weiter.

Man nimmt aus den fünf Gleichungen (14) irgend drei heraus, multipliziert sie mit geeigneten Koeffizienten, addiert dann und spaltet den Faktor $\mathfrak{A}$ ab. Beispielsweise wird die nullte, erste und zweite Reihe mit $\mathfrak{A}_{12}$, $\mathfrak{A}_{02}$, $-\mathfrak{A}_{01}$ multipliziert. Auf diese Weise entstehen zehn weitere lineare Gleichungen.

Endlich multipliziert man die fünf Gleichungen (14) der Reihe nach mit $\mathfrak{A}_0$, $-\mathfrak{A}_1$, $-\mathfrak{A}_2$, $-\mathfrak{A}_3$, $-\mathfrak{A}_4$, addiert, und dividiert durch $\mathfrak{A}$.

So entsteht aus (14) ein System von im Ganzen sechzehn linearen Gleichungen, deren fünf erste bereits dastehen, während die übrigen elf so geordnet werden sollen:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{12}x_0' + \mathfrak{A}_{02}x_1' - \mathfrak{A}_{01}x_2' + \mathfrak{A}_{\ 4}x_3' - \mathfrak{A}_{\ 3}x_4' &= \mathfrak{A}_{12}x_0 + \mathfrak{A}_{02}x_1 - \mathfrak{A}_{01}x_2 - \mathfrak{A}_{\ 4}x_3 + \mathfrak{A}_{\ 3}x_4,\\
\mathfrak{A}_{13}x_0' + \mathfrak{A}_{03}x_1' - \mathfrak{A}_{\ 4}x_2' - \mathfrak{A}_{01}x_3' + \mathfrak{A}_{\ 2}x_4' &= \mathfrak{A}_{13}x_0 + \mathfrak{A}_{03}x_1 + \mathfrak{A}_{\ 4}x_2 - \mathfrak{A}_{01}x_3 - \mathfrak{A}_{\ 2}x_4,\\
\mathfrak{A}_{14}x_0' + \mathfrak{A}_{04}x_1' + \mathfrak{A}_{\ 3}x_2' - \mathfrak{A}_{\ 2}x_3' - \mathfrak{A}_{01}x_4' &= \mathfrak{A}_{14}x_0 + \mathfrak{A}_{04}x_1 - \mathfrak{A}_{\ 3}x_2 + \mathfrak{A}_{\ 2}x_3 - \mathfrak{A}_{01}x_4,\\
\mathfrak{A}_{23}x_0' + \mathfrak{A}_{\ 4}x_1' + \mathfrak{A}_{03}x_2' - \mathfrak{A}_{02}x_3' - \mathfrak{A}_{\ 1}x_4' &= \mathfrak{A}_{23}x_0 - \mathfrak{A}_{\ 4}x_1 + \mathfrak{A}_{03}x_2 - \mathfrak{A}_{02}x_3 + \mathfrak{A}_{\ 1}x_4,\\
\mathfrak{A}_{24}x_0' - \mathfrak{A}_{\ 3}x_1' + \mathfrak{A}_{04}x_2' + \mathfrak{A}_{\ 1}x_3' - \mathfrak{A}_{02}x_4' &= \mathfrak{A}_{24}x_0 + \mathfrak{A}_{\ 3}x_1 + \mathfrak{A}_{04}x_2 - \mathfrak{A}_{\ 1}x_3 - \mathfrak{A}_{02}x_4,\\
\mathfrak{A}_{34}x_0' + \mathfrak{A}_{\ 2}x_1' - \mathfrak{A}_{\ 1}x_2' + \mathfrak{A}_{04}x_3' - \mathfrak{A}_{03}x_4' &= \mathfrak{A}_{34}x_0 - \mathfrak{A}_{\ 2}x_1 + \mathfrak{A}_{\ 1}x_2 + \mathfrak{A}_{04}x_3 - \mathfrak{A}_{03}x_4,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A}_0\,x_0' - \mathfrak{A}_1\,x_1' - \mathfrak{A}_2\,x_2' - \mathfrak{A}_3\,x_3' - \mathfrak{A}_4\,x_4' &= \mathfrak{A}_0\,x_0 - \mathfrak{A}_{\ 1}x_1 - \mathfrak{A}_2\,x_2 - \mathfrak{A}_3\,x_3 - \mathfrak{A}_4\,x_4,\\
\mathfrak{A}_1\,x_0' - \mathfrak{A}_0\,x_1' - \mathfrak{A}_{34}x_2' + \mathfrak{A}_{24}x_3' - \mathfrak{A}_{23}x_4' &= -\mathfrak{A}_1\,x_0 + \mathfrak{A}_{\ 0}x_1 - \mathfrak{A}_{34}x_2 + \mathfrak{A}_{24}x_3 - \mathfrak{A}_{23}x_4,\\
\mathfrak{A}_2\,x_0' + \mathfrak{A}_{34}x_1' - \mathfrak{A}_0\,x_2' - \mathfrak{A}_{14}x_3' + \mathfrak{A}_{13}x_4' &= -\mathfrak{A}_2\,x_0 + \mathfrak{A}_{34}x_1 + \mathfrak{A}_0\,x_2 - \mathfrak{A}_{14}x_3 + \mathfrak{A}_{13}x_4,\\
\mathfrak{A}_3\,x_0' - \mathfrak{A}_{24}x_1' + \mathfrak{A}_{14}x_2' - \mathfrak{A}_0\,x_3' - \mathfrak{A}_{12}x_4' &= -\mathfrak{A}_3\,x_0 - \mathfrak{A}_{24}x_1 + \mathfrak{A}_{14}x_2 + \mathfrak{A}_0\,x_3 - \mathfrak{A}_{12}x_4,\\
\mathfrak{A}_4\,x_0' + \mathfrak{A}_{23}x_1' - \mathfrak{A}_{13}x_2 + \mathfrak{A}_{12}x_3' - \mathfrak{A}_0\,x_4' &= -\mathfrak{A}_4\,x_0 + \mathfrak{A}_{23}x_1 - \mathfrak{A}_{13}x_2 + \mathfrak{A}_{12}x_3 + \mathfrak{A}_0\,x_4.
\end{aligned}
$$

§ 5.

Aus dem so vervollständigten System (14) lassen sich nun die Koeffizienten c_{jt} in (1) leicht ablesen. Will man etwa die c_{0t} haben, so multipliziert man die sechzehn Gleichungen der Reihe nach mit

$$\mathfrak{A},\ -\mathfrak{A}_{01},\ -\mathfrak{A}_{02},\ -\mathfrak{A}_{03},\ -\mathfrak{A}_{04},\ \mathfrak{A}_{12},\ \mathfrak{A}_{13},\ \mathfrak{A}_{14},\ \mathfrak{A}_{23},\ \mathfrak{A}_{24},\ \mathfrak{A}_{34},\ \mathfrak{A}_0,\ -\mathfrak{A}_1,\ -\mathfrak{A}_2,\ -\mathfrak{A}_3,\ -\mathfrak{A}_4$$

und addiert. Dadurch bleibt links nur $N(\mathfrak{A})x_0'$ übrig. Man erkennt, daß alle c_{jt} den Nenner $N(\mathfrak{A})$ erhalten. Ich halte es nicht für überflüssig, die einzelnen Koeffizienten herzusetzen, einmal, weil die konformen Transformationen wichtig genug sind, dann aber, weil ich glaube, daß *Lipschitz* nur durch Unterlassung dieses Schrittes verhindert worden ist, das Problem restlos zu erledigen.

$$
\begin{aligned}
N(\mathfrak{A})c_{00} &= \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}_{01}^2 + \mathfrak{A}_{02}^2 + \mathfrak{A}_{03} + \mathfrak{A}_{04}^2 + \mathfrak{A}_{12}^2 + \mathfrak{A}_{13}^2 + \mathfrak{A}_{14}^2 + \mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{24}^2 + \mathfrak{A}_{34}^2 + \mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2 + \mathfrak{A}_4^2,\\
N(\mathfrak{A})c_{11} &= \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}_{01}^2 - \mathfrak{A}_{02}^2 - \mathfrak{A}_{03}^2 - \mathfrak{A}_{04}^2 - \mathfrak{A}_{12}^2 - \mathfrak{A}_{13}^2 - \mathfrak{A}_{14}^2 + \mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{24}^2 + \mathfrak{A}_{34}^2 - \mathfrak{A}_0^2 - \mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2 + \mathfrak{A}_4^2,\\
N(\mathfrak{A})c_{22} &= \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{A}_{01}^2 + \mathfrak{A}_{02}^2 - \mathfrak{A}_{03}^2 - \mathfrak{A}_{04}^2 - \mathfrak{A}_{12}^2 + \mathfrak{A}_{13}^2 + \mathfrak{A}_{14}^2 - \mathfrak{A}_{23}^2 - \mathfrak{A}_{24}^2 + \mathfrak{A}_{34}^2 - \mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_1^2 - \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2 + \mathfrak{A}_4^2,\\
N(\mathfrak{A})c_{33} &= \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{A}_{01}^2 - \mathfrak{A}_{02}^2 + \mathfrak{A}_{03}^2 - \mathfrak{A}_{04}^2 + \mathfrak{A}_{12}^2 - \mathfrak{A}_{13}^2 + \mathfrak{A}_{14}^2 - \mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{24}^2 - \mathfrak{A}_{34}^2 - \mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 - \mathfrak{A}_3^2 + \mathfrak{A}_4^2,\\
N(\mathfrak{A})c_{44} &= \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{A}_{01}^2 - \mathfrak{A}_{02}^2 - \mathfrak{A}_{03}^2 + \mathfrak{A}_{04}^2 + \mathfrak{A}_{12}^2 + \mathfrak{A}_{13}^2 - \mathfrak{A}_{14}^2 + \mathfrak{A}_{23}^2 - \mathfrak{A}_{24}^2 - \mathfrak{A}_{34}^2 - \mathfrak{A}_0^2 + \mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2 - \mathfrak{A}_4^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N(\mathfrak{A})(c_{01} + c_{10}) &= 4\{ -\mathfrak{A}\mathfrak{A}_{01} - \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_{34} - \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_{42} - \mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_{23} \},\\
N(\mathfrak{A})(c_{01} - c_{10}) &= 4\{ -\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_{02}\mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{A}_{03}\mathfrak{A}_{13} + \mathfrak{A}_{04}\mathfrak{A}_{14} \},\\
N(\mathfrak{A})(c_{02} + c_{20}) &= 4\{ -\mathfrak{A}\mathfrak{A}_{02} + \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_{34} + \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_{41} + \mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_{13} \},\\
N(\mathfrak{A})(c_{02} - c_{20}) &= 4\{ -\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_{01}\mathfrak{A}_{21} + \mathfrak{A}_{03}\mathfrak{A}_{23} + \mathfrak{A}_{04}\mathfrak{A}_{24} \},\\
N(\mathfrak{A})(c_{03} + c_{30}) &= 4\{ -\mathfrak{A}\mathfrak{A}_{03} - \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_{24} - \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_{41} - \mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_{12} \},\\
N(\mathfrak{A})(c_{03} - c_{30}) &= 4\{ -\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_{01}\mathfrak{A}_{31} + \mathfrak{A}_{02}\mathfrak{A}_{32} + \mathfrak{A}_{04}\mathfrak{A}_{34} \},\\
N(\mathfrak{A})(c_{04} + c_{40}) &= 4\{ -\mathfrak{A}\mathfrak{A}_{04} + \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_{23} + \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_{31} + \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_{12} \},\\
N(\mathfrak{A})(c_{04} - c_{40}) &= 4\{ -\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_4 + \mathfrak{A}_{01}\mathfrak{A}_{41} + \mathfrak{A}_{02}\mathfrak{A}_{42} + \mathfrak{A}_{03}\mathfrak{A}_{43} \},
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
N(\mathfrak{A})(c_{12} + c_{21}) &= 4\{ -\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_{10}\mathfrak{A}_{20} - \mathfrak{A}_{13}\mathfrak{A}_{23} - \mathfrak{A}_{14}\mathfrak{A}_{24} \},\\
N(\mathfrak{A})(c_{12} - c_{21}) &= 4\{ \mathfrak{A}\mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_{34} - \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_{40} - \mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_{03} \},\\
N(\mathfrak{A})(c_{13} + c_{31}) &= 4\{ -\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_{10}\mathfrak{A}_{30} - \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{32} - \mathfrak{A}_{14}\mathfrak{A}_{34} \},\\
N(\mathfrak{A})(c_{13} - c_{31}) &= 4\{ \mathfrak{A}\mathfrak{A}_{13} - \mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_{24} + \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_{40} + \mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_{02} \},\\
N(\mathfrak{A})(c_{14} + c_{41}) &= 4\{ -\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4 + \mathfrak{A}_{10}\mathfrak{A}_{40} - \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{42} - \mathfrak{A}_{13}\mathfrak{A}_{43} \},\\
N(\mathfrak{A})(c_{14} - c_{41}) &= 4\{ \mathfrak{A}\mathfrak{A}_{14} + \mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_{23} - \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_{30} - \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_{02} \},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N(\mathfrak{A})(c_{23}+c_{32}) &= 4\{-\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3+\mathfrak{A}_{20}\mathfrak{A}_{30}-\mathfrak{A}_{21}\mathfrak{A}_{31}-\mathfrak{A}_{24}\mathfrak{A}_{34}\},\\
N(\mathfrak{A})(c_{23}-c_{32}) &= 4\{\mathfrak{A}\mathfrak{A}_{23}+\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_{14}-\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_{40}-\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_{01}\},\\
N(\mathfrak{A})(c_{24}+c_{42}) &= 4\{-\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4+\mathfrak{A}_{20}\mathfrak{A}_{40}-\mathfrak{A}_{21}\mathfrak{A}_{41}-\mathfrak{A}_{23}\mathfrak{A}_{43}\},\\
N(\mathfrak{A})(c_{24}-c_{42}) &= 4\{\mathfrak{A}\mathfrak{A}_{24}-\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_{13}+\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_{30}+\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_{01}\},\\
N(\mathfrak{A})(c_{34}+c_{43}) &= 4\{-\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4+\mathfrak{A}_{30}\mathfrak{A}_{40}-\mathfrak{A}_{31}\mathfrak{A}_{41}-\mathfrak{A}_{32}\mathfrak{A}_{42}\},\\
N(\mathfrak{A})(c_{34}-c_{43}) &= 4\{\mathfrak{A}\mathfrak{A}_{34}+\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_{12}-\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_{20}-\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_{01}\}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

§ 6.

Damit sind für

$$\mathfrak{A}\neq 0,\qquad N(\mathfrak{A})\neq 0$$

alle linearen Substitutionen der quadratischen Form (7) in sich geliefert, die den Eigenwert -1 nicht haben. *Ich behaupte nun, daß die* c_{jt} *in* (15) *auch dann noch die Koeffizienten einer solchen Substitution sind, wenn* $\mathfrak{A}=0$ *ist*[1]; (*sie hat dann den Eigenwert* -1).

Es ist das ohne Weiteres klar, wenn nur $N(\mathfrak{A})\neq 0$ ist. Es soll aber gezeigt werden, daß das System (14) auch für $\mathfrak{A}=0$, $N(\mathfrak{A})\neq 0$ noch eindeutig lösbar ist.

Sei etwa $\mathfrak{A}=0$, $\mathfrak{A}_{01}\neq 0$. Dann nehme ich aus (14) die erste, nullte, fünfte, sechste, siebente Gleichung. Diese bilden kein schiefes System, aber das läßt sich leicht erreichen, wenn man die letzten drei dieser Gleichungen mit entgegengesetzten Vorzeichen nimmt, und rechts als Veränderliche nicht x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, sondern $(-x_0), (-x_1), x_2, x_3, x_4$ ansieht. Dann haben die fünf Linearformen sowohl links als auch rechts die Resultante $-\mathfrak{A}_{01}^3 N(\mathfrak{A})\neq 0$ [2].

Entsprechend verfährt man, wenn auch $\mathfrak{A}_{01}=0$ ist; es sind dann noch vierzehn Möglichkeiten zu betrachten; in jedem Falle, wenn nur $N(\mathfrak{A})\neq 0$ ist, ist das System (14) eindeutig lösbar.

Daß in der Tat der Größe $\mathfrak{A}$ keine Ausnahmestellung vor den $\mathfrak{A}_{jt}$, $\mathfrak{A}_j$ zukommt, zeigt folgender Satz, mit dem wir an den Kern des ganzen Problems gelangen:

Es gibt sechzehn Substitutionen der sechzehn Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{jt}$, $\mathfrak{A}_j$, *die das System* (14) *als Ganzes stehen lassen. Jede dieser Substitutionen vertauscht die zehn Gleichungen* (11), (12) *untereinander.*

Deutet man die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{jt}$, $\mathfrak{A}_j$ als homogene Punktkoordinaten in einem R_{15}, so bestimmen die zehn Gleichungen (11), (12) eine M_{10}^8, und die genannten sechzehn Substitutionen werden involutorische Kollineationen, und bilden eine Gruppe; hier interessiert uns nur, daß die sechzehn Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{jt}$, $\mathfrak{A}_j$ als miteinander gleichberechtigt erscheinen.

Lipschitz erklärt die Größen $\mathfrak{A}_j$ so:

$$\mathfrak{A}_0=\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{34}+\mathfrak{A}_{13}\mathfrak{A}_{42}+\mathfrak{A}_{14}\mathfrak{A}_{23}:\mathfrak{A}\quad\text{usw.};$$

dazu ist $\mathfrak{A}\neq 0$ erforderlich; die Gleichungen (11) sind erfüllt, *das System* (12) *ist dann eine Folge von* (11).

---

[1]) Daß *Lipschitz* das nicht bemerkt hat, ist kaum faßlich, und wohl nur dadurch zu erklären, daß er die Koeffizienten nicht explizite hingeschrieben hat. Er behält die Forderung $\mathfrak{A}\neq 0$ bei, und muß dann zu fünfzehn weiteren Darstellungen greifen.

[2]) Aus der letzten Bemerkung folgt, daß die Substitutionsdeterminante $|c_{jt}|$ von Null verschieden ist.

Statt dessen schreibe ich

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{34} - \mathfrak{A}_{13}\mathfrak{A}_{42} - \mathfrak{A}_{14}\mathfrak{A}_{23} = 0 \text{ usw.};$$

eine sehr geringfügige Abänderung von ziemlicher Tragweite. Die $\mathfrak{A}_i$ lassen sich für $\mathfrak{A} = 0$ aus (11) nicht mehr berechnen; *dafür erhält das System* (12) *jetzt selbständigen Charakter.* Es ist also wohl wahr, daß sich für $\mathfrak{A} = 0$ die $\mathfrak{A}_i$ nicht mehr *eindeutig* berechnen lassen, wenn die $\mathfrak{A}_{ik}$ gegeben sind; aber es kommt auch nur darauf an, *daß sich aus dem System* (11), (12) *aus irgend elf der sechzehn Größen, von denen eine von Null verschieden ist, die fehlenden fünf eindeutig ergeben.*

§ 7.

Die erwähnte Gruppe sechzehnter Ordnung schreibe ich so:

(16)

ε	ε_{01}	ε_{02}	ε_{03}	ε_{04}	ε_{12}	ε_{13}	ε_{14}	ε_{23}	ε_{24}	ε_{34}	ε_0	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
ε_{01}	ε	$-\varepsilon_{12}$	$-\varepsilon_{13}$	$-\varepsilon_{14}$	$-\varepsilon_{02}$	$-\varepsilon_{03}$	$-\varepsilon_{04}$	ε_4	$-\varepsilon_3$	ε_2	ε_1	ε_0	ε_{34}	$-\varepsilon_{24}$	ε_{23}
ε_{02}	ε_{12}	ε	$-\varepsilon_{23}$	$-\varepsilon_{24}$	ε_{01}	$-\varepsilon_4$	ε_3	$-\varepsilon_{03}$	$-\varepsilon_{04}$	$-\varepsilon_1$	ε_2	$-\varepsilon_{34}$	ε_0	ε_{14}	$-\varepsilon_{13}$
ε_{03}	ε_{13}	ε_{23}	ε	$-\varepsilon_{34}$	ε_4	ε_{01}	$-\varepsilon_2$	ε_{02}	ε_1	$-\varepsilon_{04}$	ε_3	ε_{24}	$-\varepsilon_{14}$	ε_0	ε_{12}
ε_{04}	ε_{14}	ε_{24}	ε_{34}	ε	$-\varepsilon_3$	ε_2	ε_{01}	$-\varepsilon_1$	ε_{02}	ε_{03}	ε_4	$-\varepsilon_{23}$	ε_{13}	$-\varepsilon_{12}$	ε_0
ε_{12}	ε_{02}	$-\varepsilon_{01}$	ε_4	$-\varepsilon_3$	$-\varepsilon$	ε_{23}	ε_{24}	$-\varepsilon_{13}$	$-\varepsilon_{14}$	ε_0	$-\varepsilon_{34}$	ε_2	$-\varepsilon_1$	ε_{04}	$-\varepsilon_{03}$
ε_{13}	ε_{03}	$-\varepsilon_4$	$-\varepsilon_{01}$	ε_2	$-\varepsilon_{23}$	$-\varepsilon$	ε_{34}	ε_{12}	$-\varepsilon_0$	$-\varepsilon_{14}$	ε_{24}	ε_3	$-\varepsilon_{04}$	$-\varepsilon_1$	ε_{02}
ε_{14}	ε_{04}	ε_3	$-\varepsilon_2$	$-\varepsilon_{01}$	$-\varepsilon_{24}$	$-\varepsilon_{34}$	$-\varepsilon$	ε_0	ε_{12}	ε_{13}	$-\varepsilon_{23}$	ε_4	ε_{03}	$-\varepsilon_{02}$	$-\varepsilon_1$
ε_{23}	ε_4	ε_{03}	$-\varepsilon_{02}$	$-\varepsilon_1$	ε_{13}	$-\varepsilon_{12}$	ε_0	$-\varepsilon$	ε_{34}	$-\varepsilon_{24}$	$-\varepsilon_{14}$	ε_{04}	ε_3	$-\varepsilon_2$	$-\varepsilon_{01}$
ε_{24}	$-\varepsilon_3$	ε_{04}	ε_1	$-\varepsilon_{02}$	ε_{14}	$-\varepsilon_0$	$-\varepsilon_{12}$	$-\varepsilon_{34}$	$-\varepsilon$	ε_{23}	ε_{13}	$-\varepsilon_{03}$	ε_4	ε_{01}	$-\varepsilon_2$
ε_{34}	ε_2	$-\varepsilon_1$	ε_{04}	$-\varepsilon_{03}$	ε_0	ε_{14}	$-\varepsilon_{13}$	ε_{24}	$-\varepsilon_{23}$	$-\varepsilon$	$-\varepsilon_{12}$	ε_{02}	$-\varepsilon_{01}$	ε_4	$-\varepsilon_3$
ε_0	$-\varepsilon_1$	$-\varepsilon_2$	$-\varepsilon_3$	$-\varepsilon_4$	$-\varepsilon_{34}$	ε_{24}	$-\varepsilon_{23}$	$-\varepsilon_{14}$	ε_{13}	$-\varepsilon_{12}$	ε	$-\varepsilon_{01}$	$-\varepsilon_{02}$	$-\varepsilon_{03}$	$-\varepsilon_{04}$
ε_1	$-\varepsilon_0$	$-\varepsilon_{34}$	ε_{24}	$-\varepsilon_{23}$	$-\varepsilon_2$	$-\varepsilon_3$	$-\varepsilon_4$	ε_{04}	$-\varepsilon_{03}$	ε_{02}	ε_{01}	$-\varepsilon$	ε_{12}	ε_{13}	ε_{14}
ε_2	ε_{34}	$-\varepsilon_0$	$-\varepsilon_{14}$	ε_{13}	ε_1	$-\varepsilon_{04}$	ε_{03}	$-\varepsilon_3$	$-\varepsilon_4$	$-\varepsilon_{01}$	ε_{02}	$-\varepsilon_{12}$	$-\varepsilon$	ε_{23}	ε_{24}
ε_3	$-\varepsilon_{24}$	ε_{14}	$-\varepsilon_0$	$-\varepsilon_{12}$	ε_{04}	ε_1	$-\varepsilon_{02}$	ε_2	ε_{01}	$-\varepsilon_4$	ε_{03}	$-\varepsilon_{13}$	$-\varepsilon_{23}$	$-\varepsilon$	ε_{34}
ε_4	ε_{23}	$-\varepsilon_{13}$	ε_{12}	$-\varepsilon_0$	$-\varepsilon_{03}$	ε_{02}	ε_1	$-\varepsilon_{01}$	ε_2	ε_3	ε_{04}	$-\varepsilon_{14}$	$-\varepsilon_{24}$	$-\varepsilon_{34}$	$-\varepsilon$

Hier ist weil das Schema sogleich noch in anderer Bedeutung verwertet werden soll, überall ε statt $\mathfrak{A}$ geschrieben. Die erste Reihe enthält die identische Substitution; die zweite Reihe ist, wie üblich, zu lesen: Es soll ersetzt werden

$$\mathfrak{A} \text{ durch } \mathfrak{A}_{01}, \quad \mathfrak{A}_{01} \text{ durch } \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}_{02} \text{ durch } -\mathfrak{A}_{12} \text{ usw.}$$

§ 8.

Die Tafel (16) sei jetzt die Multiplikationstafel[1]) eines Systems höherer komplexer Zahlen in sechzehn Einheiten; es sei

$$(17) \qquad \dot{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}\varepsilon + \mathfrak{A}_{01}\varepsilon_{01} + \mathfrak{A}_{02}\varepsilon_{02} + \cdots + \mathfrak{A}_3\varepsilon_3 + \mathfrak{A}_4\varepsilon_4.$$

[1]) D. i. es sei etwa $\varepsilon_{01}\varepsilon_{02} = -\varepsilon_{12}$, $\varepsilon_{02}\varepsilon_{01} = +\varepsilon_{12}$, so daß der erste Faktor die Reihe, der zweite die Spalte des Produktes bestimmt.

Als konjugiert komplexe Zahl $\tilde{\mathfrak{A}}$ zu $\dot{\mathfrak{A}}$ werde die bezeichnet, die aus $\dot{\mathfrak{A}}$ bei Vorzeichenänderung (nur) der $\mathfrak{A}_{it}$ hervorgeht [1]):

$$(18)\qquad \tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}\varepsilon - \mathfrak{A}_{01}\varepsilon_{01} - \mathfrak{A}_{02}\varepsilon_2 - \cdots - \mathfrak{A}_{34}\varepsilon_{34} + \mathfrak{A}_0\varepsilon_0 + \mathfrak{A}_1\varepsilon_1 + \mathfrak{A}_2\varepsilon_2 + \mathfrak{A}_3\varepsilon_3 + \mathfrak{A}_4\varepsilon_4.$$

Dann ist

$$(19)\qquad \dot{\mathfrak{A}} \cdot \tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{A}} \cdot \dot{\mathfrak{A}} = N(\mathfrak{A}) \cdot \varepsilon = N(\mathfrak{A}),$$

da ε mit der Zahl 1 identifiziert werden darf. $N(\mathfrak{A})$ heiße die *Norm* von $\dot{\mathfrak{A}}$. Aus

$$\widetilde{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}} = \tilde{\mathfrak{B}} \cdot \tilde{\mathfrak{A}}$$

folgt noch

$$(20)\qquad N(\dot{\mathfrak{A}} \cdot \dot{\mathfrak{B}}) = N(\mathfrak{A}) \cdot N(\mathfrak{B});$$

setzt man

$$(21)\qquad \dot{x} = x_0\varepsilon_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3 + x_4\varepsilon_4,$$

so läßt sich die quadratische Form (7) so schreiben:

$$(7\,a)\qquad N(\dot{x}) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2.$$

Damit lassen sich die *eigentlichen* [2]) Substitutionen der quadratischen Form (7) in sich in die kurze Formel [3]) zusammenfassen

$$(22)\qquad \dot{\mathfrak{A}} \cdot \dot{x}' = \dot{x} \cdot \dot{\mathfrak{A}} \qquad N(\mathfrak{A}) \neq 0,$$

und die uneigentlichen heißen

$$\dot{\mathfrak{A}} \cdot \dot{x}' = -\dot{x} \cdot \dot{\mathfrak{A}}.$$

Die Formel (22) stellt, sobald man die x als homogene Punktkoordinaten deutet, die konformen Transformationen im R_3 dar.

§ 9.

Ich behaupte, daß unsere in (22) *zusammengefaßten Formeln* (1), (15) *alle eigentlichen Substitutionen der quadratischen Form* (7) *in sich liefern.* Den Weg zum Beweis zeigt § 6 an der Stelle, wo ein Gleichungssystem schief gemacht wurde.

Betrachten wir einmal die speziellen Substitutionen

$$(23)\qquad \varepsilon \cdot \dot{x}' = \dot{x} \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon_{01} \cdot \dot{x}' = \dot{x} \cdot \varepsilon_{01}, \ldots, \quad \varepsilon_4 \cdot \dot{x}' = \dot{x} \cdot \varepsilon_4.$$

Die erste ist die identische; die folgenden zehn entstehen daraus durch Änderung zweier Vorzeichen. So heißt $\varepsilon_{01} \cdot \dot{x}' = \dot{x} \cdot \varepsilon_{01}$ ausgeschrieben

$$x_0' = -x_0, \quad x_1' = -x_1, \; x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \; x_4' = x_4.$$

Die letzten fünf enthalten jedesmal vier negative Vorzeichen: $\varepsilon_0 \cdot \dot{x}' = \dot{x} \cdot \varepsilon_0$ gibt

$$x_0' = x_0, \quad x_1' = -x_1, \quad x_2' = -x_2, \quad x_3' = -x_3, \quad x_4' = -x_4.$$

---

[1]) Da, wo ein Mißverständnis nicht zu befürchten ist, lassen wir den Punkt über $\mathfrak{A}$ fort.

[2]) Denn für $\mathfrak{A} \neq 0$ kann die Substitution nur eigentlich sein, weil eine uneigentliche Substitution stets den Eigenwert -1 hat. Geometrisch gesprochen: Das Quadrat einer Korrelation hat die Determinante $+1$.

[3]) Bei *Lipschitz* ist das System komplexer Zahlen noch nicht das richtige; er kommt zu einer nicht ganz so kurzen Formel

$$\dot{\mathfrak{A}} \cdot \dot{x}' = \dot{x} \cdot \dot{\mathfrak{A}}_1,$$

wo $\dot{\mathfrak{A}}_1$ eine neue komplexe Zahl bedeutet (ähnlich bei *Vahlen*), die mit $\dot{\mathfrak{A}}$ nicht invariant zusammenhängt, und diese Formel gibt nur den sechzehnten Teil der gewünschten Substitutionen.

Nun hat *Lipschitz* gezeigt, *daß aus einer unserer Substitutionen, die den Eigenwert* -1 *besitzt, eine solche, die ihn nicht besitzt, immer dadurch hergeleitet werden kann, daß man in einer geraden Anzahl von Spalten alle Koeffizienten entgegengesetzt nimmt.*

Habe $x_j' = b_{jt}x_t$ den Eigenwert -1, dagegen

$$y_j' = -b_{j0}y_0 - b_{j1}y_1 + b_{j2}y_2 + b_{j3}y_3 + b_{j4}y_4 = d_{jt}y_t$$

nicht. Führt die erste Substitution die Form (7) in sich über, so tut es auch die andere, und umgekehrt. Die zweite läßt sich aber so darstellen:

$$\dot{\vartheta} \cdot \dot{y}' = \dot{y} \cdot \dot{\vartheta} \qquad (\vartheta \neq 0, \quad N(\vartheta) \neq 0).$$

Nun ist aber auch $y_j' = b_{jt}z_t$, wenn

$$z_0 = -y_0, \quad z_1 = -y_1, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3, \quad z_4 = y_4,$$

wenn also nach (23) $\varepsilon_{01}\dot{z} = \dot{y} \cdot \varepsilon_{01}$ ist. Man kann also auch schreiben

$$\varepsilon_{01} \cdot \dot{\vartheta} \cdot \dot{y}' = \dot{z} \cdot \varepsilon_{01} \cdot \dot{\vartheta}$$

Ersetzt man jetzt y' durch x', z durch x, $\varepsilon_{01} \cdot \dot{\vartheta}$ durch $\dot{\mathfrak{A}}$, so wird nach (20) $N(\mathfrak{A}) \neq 0$, und außerdem $\mathfrak{A}_{01} = \vartheta \neq 0$. Unsere Substitution $x_j' = b_{jt}x_t$ ist dann also in der Gestalt (22) dargestellt, und wir wissen ferner, daß $\mathfrak{A} = 0$ wird.

Diese Schlußweise hat man noch vierzehn mal zu wiederholen. Damit ist der Vollständigkeitsbeweis erbracht.

§ 10.

Setzt man in (14) für x_j' die Ausdrücke $c_{jt}x_t$ ein, so entstehen achtzig Relationen zwischen den Koeffizienten c und den „Parametern" $\mathfrak{A}$. Diese Relationen geben ein bequemes Mittel, *bei gegebenen Koeffizienten die Parameter aufzusuchen.* (Bequem freilich nur im numerischen Spezialfall; allgemeine Formeln — man braucht deren mehrere Systeme — fallen umständlich genug aus (vierreihige Determinanten!)). Führt man das für die identische Substitution aus, so werden alle $\mathfrak{A}_{jt}$ und auch alle $\mathfrak{A}_j$ Null, während $\mathfrak{A} \neq 0$ ganz beliebig bleibt. Daraus folgt zunächst der *homogene Charakter unserer Parameter*; die Systeme $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{jt}, \mathfrak{A}_j)$ und $(\varrho\mathfrak{A}, \varrho\mathfrak{A}_{jt}, \varrho\mathfrak{A}_j)$ ergeben $(\varrho \neq 0)$ dieselbe Substitution. Jetzt kann man sagen, daß zu jeder unserer Substitutionen ein einziges Parametersystem $(\mathfrak{A} : \mathfrak{A}_{jt} : \mathfrak{A}_j)$ gehört.

§ 11.

Nennt man k-te induzierte Substitution die der $(k+1)$-reihigen Determinanten, so spielt hier die zweite induzierte Substitution eine Sonderrolle. Setzen wir nämlich die Gleichung an

$$\dot{\mathfrak{A}} \cdot \dot{\mathfrak{X}}' = \dot{\mathfrak{X}} \cdot \dot{\mathfrak{A}}, \qquad (N(\mathfrak{A}) \neq 0), \tag{24}$$

wo die Größen $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_{jt}, \mathfrak{X}_j$ den Forderungen (11) (12) genügen, so wird die zweite induzierte Substitution geliefert für $\mathfrak{X} = 0, \mathfrak{X}_j = 0$. Es ergibt sich das später auf Grund geometrischer Überlegungen ohne jede Rechnung; hier ist dann zu setzen

$$\mathfrak{X}_{01} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}, \qquad \mathfrak{X}_{02} = -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad \text{usw.}$$

Setzt man andrerseits $\mathfrak{X} = 0$, $\mathfrak{X}_{jt} = 0$, so umfaßt die Formel (24) auch unsere frühere (22); *sie liefert also sowohl die Substitution selbst, als auch ihre zweite induzierte.* Die $\mathfrak{X}$ bilden, (ebenso wie die $\mathfrak{A}$), einen *Transformator* in der Sprache *Vahlens*, (Geometrisch ist darunter eine Figur von fünf wechselweise senkrechten, in bestimmter Weise geordneten orientierten Kugeln zu verstehen; im Sonderfalle kann man dem Transformator zuordnen einen Kreis, bzw. eine Kugel).

§ 12.

Aus (24) kann man nun die hundert Koeffizienten der zweiten induzierten Transformation sofort hinschreiben; man hat dazu genau so vorzugehen wie in § 5. Von diesen interessieren uns die in der Hauptdiagonale, weil wir sie für die *charakteristische Gleichung* brauchen. Diese ergibt sich nach Abspaltung des Faktors $1 - \lambda$ (für die Substitution $\dot{\mathfrak{A}} \cdot \dot{x}' = \dot{x} \cdot \dot{\mathfrak{A}}$) zu

$$(25) \qquad \lambda^4 N(\mathfrak{A}) - 4\lambda^3 \{ \mathfrak{A}^2 - (\mathfrak{A}\mathfrak{A}) \} + 6\lambda^2 \{ \mathfrak{A}^2 + (\mathfrak{A}\mathfrak{A}) - \tfrac{1}{3}(\mathfrak{A}/\mathfrak{A}) \} - 4\lambda \{ \mathfrak{A}^2 - (\mathfrak{A}\mathfrak{A}) \} + N(\mathfrak{A}) = 0.$$

Hier ist gesetzt

$$(25\,a) \qquad (\mathfrak{A}\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_0^2 - \mathfrak{A}_1^2 - \mathfrak{A}_2^2 - \mathfrak{A}_3^2 - \mathfrak{A}_4^2,$$

$$(25\,b) \qquad (\mathfrak{A}/\mathfrak{A}) = -\mathfrak{A}_{01}^2 - \mathfrak{A}_{02}^2 - \mathfrak{A}_{03}^2 - \mathfrak{A}_{04}^2 + \mathfrak{A}_{12}^2 + \mathfrak{A}_{13}^2 + \mathfrak{A}_{14}^2 + \mathfrak{A}_{23}^2 + \mathfrak{A}_{24}^2 + \mathfrak{A}_{34}^2.$$

Diese Ausdrücke sind die Normen für die in § 11 auftretenden speziellen Transformatoren $(0 : 0 : \mathfrak{A}_j)$ und $(0 : \mathfrak{A}_{jt} : 0)$.

Jetzt liefert die Elementarteilertheorie folgende Klassifikation:

I. $\mathfrak{A} \neq 0$.

A. Nicht alle $\mathfrak{A}_j$ verschwinden.

1. $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) \neq 0$.

a. $(\mathfrak{A}|\mathfrak{A})^2 - 4\,\mathfrak{A}^2(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) \neq 0$. [11111].

b. $(\mathfrak{A}|\mathfrak{A})^2 - 4\,\mathfrak{A}^2(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) = 0$.

α) $\mathfrak{C}_4(\mathfrak{A}) \not\equiv 0$. [221].

β) $\mathfrak{C}_4(\mathfrak{A}) \equiv 0$. [1(11)(11)].

2. $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) = 0$.

a. $(\mathfrak{A}|\mathfrak{A}) \neq 0$. [311].

b. $(\mathfrak{A}|\mathfrak{A}) = 0$. [5].

B. Alle $\mathfrak{A}_j$ verschwinden.

1. $(\mathfrak{A}|\mathfrak{A}) \neq 0$. [(111)11].

2. $(\mathfrak{A}|\mathfrak{A}) = 0$, ohne daß alle $\mathfrak{A}_{jt}$ verschwinden.

a. $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{A}) \not\equiv 0$. [(311)].

b. $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{A}) \equiv 0$. [(221)].

3. Alle $\mathfrak{A}_{jt}$ verschwinden. [(11111)].

II. $\mathfrak{A} = 0$.

A. $(\mathfrak{A}|\mathfrak{A}) \neq 0$.

1. $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) \neq 0$. [(11) 111].

2. $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) = 0$, ohne daß alle $\mathfrak{A}_j$ verschwinden. [3(11)].

3. Alle $\mathfrak{A}_j$ verschwinden. [(111)(11)].

B. $(\mathfrak{A}|\mathfrak{A}) = 0$.

1. Nicht alle $\mathfrak{A}_{jt}$ verschwinden.
   a. $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{A}) \not\equiv 0$. [(31)1].
   b. $\mathfrak{C}_2(\mathfrak{A}) \equiv 0$. [(22)1].
2. Alle $\mathfrak{A}_{jt}$ verschwinden. [(1111)1].

Hierin treten noch zwei Kovarianten auf. Diese haben folgende Bedeutung

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_2(\mathfrak{A}) = {} & (\mathfrak{A}_{01}^2 + \mathfrak{A}_{02}^2 + \mathfrak{A}_{03}^2 + \mathfrak{A}_{04}^2)\mathfrak{x}_0^2 + (-\mathfrak{A}_{10}^2 + \mathfrak{A}_{12}^2 + \mathfrak{A}_{13}^2 + \mathfrak{A}_{14}^2)\mathfrak{x}_1^2 + \cdots \\ & + (-\mathfrak{A}_{40}^2 + \mathfrak{A}_{41}^2 + \mathfrak{A}_{42}^2 + \mathfrak{A}_{43}^2)\mathfrak{x}_4^2 \\ & - 2\mathfrak{A}_{0j}\mathfrak{A}_{1j}\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_1 - 2\mathfrak{A}_{0j}\mathfrak{A}_{2j}\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_2 - 2\mathfrak{A}_{0j}\mathfrak{A}_{3j}\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_3 - 2\mathfrak{A}_{0j}\mathfrak{A}_{4j}\mathfrak{x}_0\mathfrak{x}_4 \\ & + 2(-\mathfrak{A}_{10}\mathfrak{A}_{20} + \mathfrak{A}_{13}\mathfrak{A}_{23} + \mathfrak{A}_{14}\mathfrak{A}_{24})\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 + \cdots \\ & + 2(-\mathfrak{A}_{30}\mathfrak{A}_{40} + \mathfrak{A}_{31}\mathfrak{A}_{41} + \mathfrak{A}_{32}\mathfrak{A}_{42})\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_4.\end{aligned} \tag{26}$$

Die andere Kovariante heißt

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_4(\mathfrak{A}) = {} & \{2\,\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{A})\mathfrak{A}_{01} - (\mathfrak{A}|\mathfrak{A})\{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_{34} + \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_{42} + \mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_{23})\}\}X_{01} \\ & + \{2\,\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{A})\mathfrak{A}_{02} + (\mathfrak{A}|\mathfrak{A})\{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_{34} + \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_{41} + \mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_{13})\}\}X_{02} + \cdots \\ & + \{2\,\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{A})\mathfrak{A}_{12} - (\mathfrak{A}|\mathfrak{A})\{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_{34} - \mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_{40} - \mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_{03})\}\}X_{12} + \cdots \\ & + \{2\,\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{A})\mathfrak{A}_{34} - (\mathfrak{A}|\mathfrak{A})\{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_{12} - \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_{20} - \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_{01})\}\}X_{34}.\end{aligned} \tag{27}$$

Über ihre geometrische Bedeutung wird eingehend zu reden sein.

§ 13.

Legt man den $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{jt}$, $\mathfrak{A}_j$ *irgendwelche* Werte bei — für die $N(\mathfrak{A}) \neq 0$ ist —, so braucht die komplexe Zahl $\dot{\mathfrak{A}}$ kein Transformator zu sein. Es ist dann wohl noch $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} = \tilde{\mathfrak{B}}\cdot\tilde{\mathfrak{A}}$, aber es braucht nicht mehr $\dot{\mathfrak{A}}\cdot\tilde{\mathfrak{A}} = N(\mathfrak{A})$ zu sein, nicht mehr $\dot{\mathfrak{A}}^{-1} = \tilde{\mathfrak{A}} : N(\mathfrak{A})$ usw. Im allgemeinen ist dann nämlich $\dot{\mathfrak{A}}\cdot\tilde{\mathfrak{A}}$ gar nicht mehr skalar. Setzt man

$$\dot{\mathfrak{A}}\cdot\tilde{\mathfrak{A}} = \dot{\mathfrak{C}}, \tag{28}$$

so wird nämlich

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} &= N(\mathfrak{A}), \quad \mathfrak{C}_{jt} = 0, \\ \mathfrak{C}_0 &= 2(\mathfrak{A}\ \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_{01}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_{02}\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_{03}\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}_{04}\mathfrak{A}_4 - \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{34} - \mathfrak{A}_{13}\mathfrak{A}_{42} - \mathfrak{A}_{14}\mathfrak{A}_{23}), \\ \mathfrak{C}_1 &= 2(\mathfrak{A}_{01}\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}\ \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_{13}\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_{14}\mathfrak{A}_4 + \mathfrak{A}_{02}\mathfrak{A}_{34} + \mathfrak{A}_{03}\mathfrak{A}_{42} + \mathfrak{A}_{04}\mathfrak{A}_{23}), \\ \mathfrak{C}_2 &= 2(\mathfrak{A}_{02}\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}\ \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_{23}\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_{24}\mathfrak{A}_4 - \mathfrak{A}_{01}\mathfrak{A}_{34} - \mathfrak{A}_{03}\mathfrak{A}_{41} - \mathfrak{A}_{04}\mathfrak{A}_{13}), \\ \mathfrak{C}_3 &= 2(\mathfrak{A}_{03}\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_{13}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_{23}\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}\ \mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_{34}\mathfrak{A}_4 + \mathfrak{A}_{01}\mathfrak{A}_{24} + \mathfrak{A}_{02}\mathfrak{A}_{41} + \mathfrak{A}_{04}\mathfrak{A}_{12}), \\ \mathfrak{C}_4 &= 2(\mathfrak{A}_{04}\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_{14}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_{24}\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_{34}\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{A}\ \mathfrak{A}_4 - \mathfrak{A}_{01}\mathfrak{A}_{23} - \mathfrak{A}_{02}\mathfrak{A}_{31} - \mathfrak{A}_{03}\mathfrak{A}_{12}).\end{aligned} \tag{28}$$

Ist aber $\dot{\mathfrak{A}}\cdot\tilde{\mathfrak{A}}$ skalar, so braucht auch noch nicht $\tilde{\mathfrak{A}}\cdot\dot{\mathfrak{A}} = N(\mathfrak{A})$ zu sein, es sind dann wohl die Gleichungen (12) erfüllt, aber nicht notwendig auch (11). Auch aus $\dot{\mathfrak{A}}\cdot\tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{A}}\cdot\mathfrak{A}$ braucht noch nicht $\dot{\mathfrak{A}}\cdot\tilde{\mathfrak{A}} = N(\mathfrak{A})$ zu folgen.

Es gilt indessen der merkwürdige Satz:

Ist $\dot{\mathfrak{A}}\cdot\tilde{\mathfrak{A}}$ skalar, so ist es für das Bestehen der Gleichung

$$\dot{\mathfrak{A}}\cdot\tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{A}}\cdot\dot{\mathfrak{A}} = N(\mathfrak{A})$$

hinreichend, daß $N(\mathfrak{A}) \neq 0$ ist.

Vorausgesetzt wird also außer $N(\mathfrak{A}) \neq 0$ noch

$$\mathfrak{C}_j = 0. \tag{29}$$

Sei weiter $\mathfrak{A} \neq 0$. Betrachtet man außerdem noch die $\mathfrak{A}_{jt}$ als bekannt, so lassen sich aus (11) fünf Größen $\overline{\mathfrak{A}}_j$ so berechnen, daß das System $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{jt}, \overline{\mathfrak{A}}_j)$ einen Transformator bildet. Dessen Norm sei $N(\overline{\mathfrak{A}})$.

Aus (29) sollen jetzt die $\mathfrak{A}_j$ berechnet werden. Schafft man demgemäß in jeder der fünf Gleichungen die drei letzten Glieder nach rechts, so kann man rechts $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}}_j$ schreiben. Links erkennen wir aber sofort die Struktur der ersten fünf Gleichungen (14) (linke Seiten!). Die Determinante wird $\mathfrak{A}^3 N(\overline{\mathfrak{A}})$. Das System hat stets die Lösung $\mathfrak{A}_j = \overline{\mathfrak{A}}_j$. Soll es weiter keine geben, so muß $N(\overline{\mathfrak{A}}) \neq 0$ sein; daraus folgt dann auch $N(\mathfrak{A}) \neq 0$.

Gibt es noch andere Lösungen $\mathfrak{A}_j = \overline{\mathfrak{A}}_j + \mathfrak{D}_j$, so wird wegen $N(\overline{\mathfrak{A}}) = 0$

$$N(\mathfrak{A}) = 2\,(\overline{\mathfrak{A}}_0\mathfrak{D}_0 - \overline{\mathfrak{A}}_1\mathfrak{D}_1 - \overline{\mathfrak{A}}_2\mathfrak{D}_2 - \overline{\mathfrak{A}}_3\mathfrak{D}_3 - \overline{\mathfrak{A}}_4\mathfrak{D}_4) + (\mathfrak{D}\mathfrak{D}).$$

Die $\mathfrak{D}_j$ genügen jetzt dem *homogenen* System

$$\mathfrak{A}\mathfrak{D}_0 + \mathfrak{A}_{0i}\mathfrak{D}_i = 0, \qquad -\mathfrak{A}\mathfrak{D}_k + \mathfrak{A}_{kj}\mathfrak{D}_j = 0.$$

Multipliziert man mit $\overline{\mathfrak{A}}_j$ und addiert, so verschwindet der erste Summand von $N(\mathfrak{A})$, verfährt man ebenso mit den Multiplikatoren $\mathfrak{D}_j$, so erkennt man, daß auch der zweite Summand von $N(\mathfrak{A})$ verschwindet: Aus $N(\overline{\mathfrak{A}}) = 0$ folgt, daß auch $N(\mathfrak{A}) = 0$ ist. Vorher war gezeigt, daß aus $N(\overline{\mathfrak{A}}) \neq 0$ auch $N(\mathfrak{A}) \neq 0$ folgt. Daher kann man umkehren: Ist $N(\mathfrak{A}) \neq 0$, so ist auch $N(\overline{\mathfrak{A}}) \neq 0$. Dann hat das System (29) nur die eine Lösung $\mathfrak{A}_j = \overline{\mathfrak{A}}_j$; damit sind also (11) und (12) erfüllt; das System $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_{jt}, \mathfrak{A}_j)$ bildet einen Transformator, und es ist $\dot{\mathfrak{A}} \cdot \tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{A}} \cdot \dot{\mathfrak{A}} = N(\mathfrak{A})$. — Für $\mathfrak{A} = 0$ hat man elf andere Größen als bekannt anzunehmen (vgl. § 6).

§ 14.

Kleiden wir diese merkwürdigen Verhältnisse in die Sprache der Geometrie! Deuten wir die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{jt}$, $\mathfrak{A}_j$ als homogene Punktkoordinanten im R_{15}, so stellen die Gleichungen $\mathfrak{C}_j = 0$ eine $\mathfrak{M}_{10}$ dar, die als Schnitt von *fünf singularitätenfreien* quadratischen Mannigfaltigkeiten M_{14}^2 erscheint [1]). Die Gleichungen (11), (12) gaben dagegen eine M_{10}^8, die den Durchschnitt von *zehn stark singulären* quadratischen Mannigfaltigkeiten M_{14}^2 bildete (jede von diesen trug einen singulären R_7):

Jeder Punkt von M_{10}^8 liegt auf $\mathfrak{M}_{10}$, aber nicht umgekehrt. Die Punkte von $\mathfrak{M}_{10}$, die nicht auf M_{10}^8 liegen, gehören der singularitätenfreien Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_{14}^2$ an, deren Gleichung $N(\mathfrak{A}) = 0$ ist; damit entfällt die Möglichkeit, daß $\mathfrak{M}_{10}$ reduzibel sein könnte. Zu bemerken ist noch, daß es andrerseits auf $\mathfrak{M}_{14}^2$ auch Punkte von $\mathfrak{M}_{10}$ gibt, die gleichzeitig solche von M_{10}^8 sind.

---

[1]) Die Ordnung von $\mathfrak{M}_{10}$ ist größer als zehn.

Es ist also auf zwei Arten möglich, die Gesamtheit der Transformatoren, also auch die der konformen Transformationen, durch Fallenlassen der Bedingung $N(\mathfrak{A}) \neq 0$ *zu einem abgeschlossenen Kontinuum zu ergänzen.*

§ 15.

Sind in der quadratischen Form

$$a_{jt} x_j x_t$$

die Koeffizienten nicht spezialisiert, so läßt sich die Ermittlung der linearen Substitutionen, die sie in sich überführen, ebenfalls so vollziehen, wie wir es gezeigt haben. Aus den fünf Gleichungen, die man aus dem *Frobenius*schen Ansatz erhält, lassen sich elf weitere Gleichungen genau so herstellen, wie in § 4, d. i. unter Benutzung derselben einfachen Multiplikatoren. Dieses vervollständigte System ist aber nicht mehr so einfach lösbar, wie das entsprechende in § 5, vielmehr hat man zur Ausrechnung irgendeines x_j' sechzehn außerordentlich kompliziert gebaute Multiplikatoren zu verwenden; dabei treten Unterdeterminanten von zwei, drei, vier Reihen auf, die z. T. zu elfgliedrigen Aggregaten verbunden sind. Der Ausdruck, der an die Stelle von $N(\mathfrak{A})$ tritt, enthält $1 + 55 + 15$ Glieder. Es darf also wohl ausgesprochen werden, daß wir von der restlosen Erledigung des Problems der linearen Substitutionen einer quadratischen Form in sich zurzeit noch weit entfernt sind.

Zur natürlichen Geometrie einer zehngliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene.

Von *Gertrud Wiegandt* in Dresden.

In einer seiner neueren Arbeiten („Zur natürlichen Geometrie einer Gruppe von Berührungstransformationen“ Leipz. Ber. 25. II. 1924) beschäftigt sich *G. Kowalewski* mit der natürlichen Geometrie der Gruppen von Berührungstransformationen.

Bezüglich des Begriffes „Natürliche Geometrie einer ebenen Transformationsgruppe“ sei auf die grundlegende Arbeit von *G. Pick*: „Natürliche Geometrie ebener Transformationsgruppen“ (Sitz. Ber. d. Wiener Akad. Math. Phys. Kl. 1906) verwiesen, in welcher dieser den von Cesàro für die Gruppe der Bewegungen geschaffenen Einzelfall auf jede beliebige endliche kontinuierliche Gruppe von Punkttransformationen der Ebene erweitert. Der von ihm eingeführte Begriff der kovarianten Koordinaten ist später präcisiert und die ganze Theorie durch neue Begriffsbildungen erweitert und bereichert worden; desgleichen wurde die Methode zur Berechnung der neugeschaffenen Größen im Fall einer gegebenen Gruppe zu einem hohen Grade von Einfachheit geführt. In beiden Richtungen sei besonders an die Arbeiten von *G. Kowalewski* erinnert, die im Anschluß an Ideen von *E. Cartan* entstanden (*E. Cartan*: „La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile“, Bull. des sciences math. 1910); sie waren zunächst der Verbindung der natürlichen Geometrie ebener Transformationsgruppen mit der *Lie*schen Gruppentheorie gewidmet und haben sich dann zum Ziel gesetzt, mit Hilfe neu geschaffener Begriffe und durch Anwendung sinngemäßer Operationen, wie später noch näher erläutert werden soll, vereinfachende Methoden zur Berechnung der Fundamentalgrößen zu finden. Die vorliegende Abhandlung hat es sich zur Aufgabe gestellt, den Erfolg dieser Arbeiten und die Fruchtbarkeit der neuen vereinfachenden Methoden an einem Beispiel, der zehngliedrigen irreduziblen Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene, zu zeigen.

Die Übertragung der Ergebnisse der zunächst nur für Gruppen ebener Punkttransformationen aufgestellten natürlichen Geometrie auf Gruppen ebener Berührungstransformationen ist von *G. Kowalewski* in der anfangs erwähnten Arbeit durchgeführt. Die Grundlagen für diese Durchführung sind schon in einer Arbeit vom 11. VI. 1923 geschaffen worden („Invariante Differentialgleichungen und Differentialinvarianten bei Gruppen ebener Berührungstransformationen“, Leipz.

Ber. 11. VI. 1923), und zwar durch Einführung des wichtigen Begriffes der *Pfaff*schen Grundinvariante einer Gruppe von Berührungstransformationen. Die *Pfaff*sche Grundinvariante nimmt bei Berührungstransformationen die Stelle des bei Punkttransformationen auftretenden invarianten Flächenelementes ein. Ein invariantes Flächenelement kann man sich vorstellen als simultane Invariante eines Kurvenelementes und eines den Punkt (x, y) dieses Elementes umgebenden infinitesimalen Gebietes, das man sich als Parallelogramm $dx\delta y - dy\delta x$ mit der Ecke (x, y) denken kann. Eine solche Invariante kann bei Berührungstransformationen deshalb nicht auftreten, weil hier wohl Elementverein in Elementverein, aber nicht Punkt und benachbartes Gebiet in Punkt und benachbartes Gebiet verwandelt wird. Wohl aber gibt es bei r-gliedrigen Gruppen von Punkttransformationen sowohl als auch von Berührungstransformationen ein niedrigstes invariantes Bogenelement, d. h. eine Invariante des Kurvenelementes e_{r-2} in Verbindung mit einer infinitesimalen Tangentialstrecke, von x, y nach $x + dx$, $y + y_1 dx$ laufend. Hier wie im folgenden sei unter dem Kurvenelement e_{r-2} ein Element $(r-2)$. Ordnung einer r-gliedrigen transitiven ebenen Gruppe G_r von Berührungstransformationen verstanden; es enthält also die Koordinaten $x, y, y_1, \ldots, y_{r-2}$, wobei $y_1, \ldots, y_{r-2}$ die $(r-2)$ ersten Ableitungen von y nach x bedeuten. Man braucht diese Kurvenelemente, wenn man die infinitesimalen Transformationen der r-gliedrigen Gruppe in der bekannten Weise auf die Ordnung $(r-2)$ erweitert.

Es war nun *G. Kowalewski* im Verlaufe seiner Untersuchungen gelungen, die invarianten Bogen- und Flächenelemente ebener transitiver Gruppen von Punkttransformationen vollkommen integrationsfrei aus den infinitesimalen Transformationen zu gewinnen. Der grundlegende Gedanke, der zu dieser neuen Berechnungsweise führte, ist der der gemischten Gruppenerweiterung; darunter versteht man die gleichzeitige Einwirkung der infinitesimalen Transformationen der Gruppe G_r auf ein Kurvenelement $(\varrho-2)$. und ein solches von $(\sigma-2)$. Ordnung $(\varrho+\sigma=r)$, wobei auch Kurvenelemente nullter Ordnung, also Punkte, zulässig sind. Beide Kurvenelemente sind dabei gleichwertig, und nur zur Unterscheidung wird im folgenden das eine mit großen, das andere mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Auf Grund dieser Methode und mit Hilfe neuer wichtiger Sätze ist die integrationsfreie Berechnung der invarianten Bogen- und Flächenelemente, der Relativkoordinaten sowie der niedrigsten ungemischten Differentialinvariante bei Gruppen ebener Punkttransformationen gelungen.

Bei Gruppen ebener Berührungstransformationen tritt nun an Stelle des invarianten Flächenelementes die schon oben erwähnte *Pfaff*sche Grundinvariante. Beweise für die Existenz dieser Invariante sind in zwei neueren Arbeiten von *G. Kowalewski* („Invariante Differentialgleichungen und Differentialinvarianten bei Gruppen ebener Berührungstransformationen", Leipz. Ber. 11. VI. 1924; „Zur natürlichen Geometrie einer Gruppe von Berührungstransformationen", Leipz. Ber. 25. II. 1924) gegeben, und zwar in der ersten der zitierten Arbeiten für ungemischte Gruppenerweiterung, in der zweiten in ganz allgemeiner Form. Die Invariante läßt sich im ersten Falle schreiben in der Form

$$\gamma(e_{r-2})\,(dy - y_1\,dx),$$

wo γ ein Ausdruck in $x, y, y_1, \ldots, y_{r-2}$ ist; dem Existenzbeweis wurden die endlichen Gleichungen

$$x' = F(x, y, y_1, a_1, \cdots, a_r) \qquad y' = G(x, y, y_1, a_1, \cdots, a_r)$$
$$y_1' = H(x, y, y_1, a_1, \cdots, a_r)$$

einer r-gliedrigen transitiven Gruppe G_r von Berührungstransformationen der Ebene sowie die bekanntlich bei Berührungstransformationen bestehende Beziehung

$$dy' - y_1' dx' = \varrho(x, y, y_1, a_1, \cdots, a_r)(dy - y_1\, dx)$$

zu Grunde gelegt. Im ganz allgemeinen Falle lautet die *Pfaff*sche Grundinvariante

$$\gamma(e_k, \mathfrak{B})\,(dy - y_1\, dx),$$

wobei e_k ein x, y, y_1 enthaltendes Kurvenelement und $\mathfrak{B}$ ein so beschaffenes Gebilde sein muß, daß die Paare e_k, $\mathfrak{B}$ durch die Gruppe einfach-transitiv vertauscht werden. Man erkennt, daß die ungemischten *Pfaff*schen Grundinvarianten Spezialfälle dieser allgemeinen Invariante sind. In derselben Weise läßt sich die Existenz einer allgemeinen Invariante von der Form

$$\omega(e_k, \mathfrak{B})dx$$

nachweisen, von welcher die ungemischten niedrigsten invarianten Bogenelemente Spezialfälle sind.

Es ist nun möglich, unmittelbar an den Aufbau einer natürlichen Geometrie der zehngliedrigen irreduziblen Gruppe G_{10} von Berührungstransformationen der Ebene heranzugehen, welche folgendermaßen lautet:

$$(G_{10}) \quad \boxed{\begin{array}{cccccc} p & q & xq + q_1 & \frac{1}{2}x^2q + xq_1 & xp - y_1q_1 & y_1p + \frac{1}{2}y_1^2q \\ xp + 2yq + y_1q_1 & & (y - xy_1)p - \frac{1}{2}xy_1^2q - \frac{1}{2}y_1^2q_1 & & \frac{1}{2}x^2p + xyq + yq_1 & \\ \multicolumn{6}{c}{\left(xy - \frac{1}{2}x^2y_1\right)p + \left(y^2 - \frac{1}{4}x^2y_1^2\right)q + \left(yy_1 - \frac{1}{2}xy_1^2\right)q_1} \end{array}}$$

Die hier aufgeschriebenen 10 infinitesimalen Transformationen sind dieselben, die *G. Noth* nach dem Vorbild von *Lie* (Transformationsgruppen II S. 433) in seiner Dissertation („Differentialinvarianten und invariante Differentialgleichungen zweier zehngliedriger Gruppen", Leipz. Ber. Bd. 56, 1904) benutzt hat. Für diese Gruppe G_{10} sollen in der vorliegenden Arbeit die Fundamentalgrößen der natürlichen Geometrie, also das niedrigste invariante Bogenelement und die *Pfaff*sche Grundinvariante, die Relativkoordinaten und die niedrigste ungemischte Differentialinvariante berechnet werden. Die Arbeit wird sich dabei insofern an die oben erwähnte Dissertation von *G. Noth* weiterführend anschließen, als sich die Berechnung der niedrigsten Differentialinvariante, die von ihm schon aufgestellt wurde, infolge der neuen von *G. Kowalewski* ersonnenen Methoden viel einfacher und eleganter gestalten wird, als es bei *G. Noth* möglich war. Außerdem werden auch die beiden von ihm bereits ausgerechneten ungemischten invarianten Differentialgleichungen unserer Gruppe benutzt werden.

I. Relativkoordinaten bei der Gruppe G_{10}.

Der Begriff Relativkoordinaten ist von *G. Kowalewski* eingeführt worden im Anschluß an *Cartan* und an die *Pick*schen kovarianten Koordinaten. Die letzteren definiert *Pick* selbst für eine ebene transitive Gruppe von Punkttransformationen folgendermaßen: Kovariante Koordinaten eines Punktes $\mathfrak{P}(X, Y)$ in bezug auf ein Kurvenelement $(r-2)$. Ordnung $x, y, y_1, \ldots, y_{r-2}$ sind zwei von $X, Y, x, y, y_1, \ldots, y_{r-2}$ abhängige Größen u, v, welche erstens die Lage des Punktes $\mathfrak{P}$ bestimmen und zweitens gegenüber einer auf $\mathfrak{P}$ und e_{r-2} ausgeübten infinitesimalen Transformation unveränderlich sind, wie immer die zu Grunde gelegte Kurve angenommen sein mag. Die kovarianten Koordinaten sollen also für eine beliebige ebene transitive Gruppe von Punkttransformationen dem entsprechen, was für die Gruppe der Bewegungen die auf das System Tangente-Normale einer zu Grunde gelegten Kurve bezogenen cartesischen Koordinaten sind.

Denken wir an ebene transitive Gruppen von Berührungstransformationen, so ergeben sich die kovarianten Koordinaten u, v, w, indem die obige Definition sinngemäß auf ein Linienelement $E_1(X, Y, Y_1)$ und ein Kurvenelement $(r-2)$. Ordnung e_{r-2} angewandt wird. Die *Kowalewski*schen Relativkoordinaten sind insofern eine Präzisierung der *Pick*schen kovarianten Koordinaten, als von ihnen gefordert wird, daß sie sich auf X, Y bezw. X, Y, Y_1 reduzieren sollen, wenn das Element e eine besondere Anfangslage e_0 annimmt.

Berechnung der ersten Relativkoordinate für die Gruppe G_{10}.

Da unsere Gruppe G_{10} eine transitive ist, d. h. die Kurvenelemente 8. Ordnung transitiv vertauscht, so ist es möglich, bei ihr von den Relativkoordinaten eines Linienelementes $E_1(X, Y, Y_1)$ in bezug auf ein Kurvenelement $e_8(x, y, y_1, \ldots, y_8)$ zu reden, wobei diese Verbindung von E_1 und e_8 als die nächstliegende und einfachste gewählt sein möge. Die Bestimmung der einen dieser Relativkoordinaten, also einer gemischten Differentialinvariante der Gruppe G_{10} zwischen E_1 und e_8, gründet sich auf folgenden von *G. Kowalewski* aufgestellten Satz: *Kennt man bei einer ebenen Gruppe von Berührungstransformationen ein invariantes Bogenelement $\omega(e_\alpha)dx$, eine Pfaffsche Grundinvariante $\gamma(e_\beta)(dy - y_1 dx)$ und eine invariante Differentialgleichung $y_n - \varphi(e_{n-1}) = 0$, letztere von höherer als 2. Ordnung, so stellt der Ausdruck*

$$[y_n - \varphi(e_{n-1})]\,\gamma\omega^{-n} \qquad (n > 2)$$

eine Differentialinvariante dar, die sich auch auf eine Konstante reduzieren kann. Dieser Satz, der sein Analogon in der Theorie der ebenen Punkttransformationsgruppen hat (*Kowalewski*, Math. Ztschr. 1924), wird zum ersten Male aufgestellt und bewiesen in der Arbeit „Invariante Differentialgleichungen und Differentialinvarianten bei Gruppen ebener Berührungstransformationen“ (Leipz. Ber. 11. VI. 1923), ein vereinfachter Beweis wird in der oben erwähnten Arbeit „Zur natürlichen Geometrie einer Gruppe von Berührungstransformationen“ (Leipz. Ber. 25. II. 1924) gegeben. ω, γ und $y_n - \varphi(e_{n-1})$ können dabei ungemischte oder gemischte Gebilde sein.

Eine fruchtbringende Anwendung dieses Satzes ergibt sich besonders dann,

wenn, wie das bei unserer Gruppe G_{10} der Fall ist, zwei ungemischte invariante Differentialgleichungen $y_n - \varphi(e_{n-1}) = 0$ vorhanden sind und wenn die Ordnung des Ausdruckes $[y_n - \varphi(e_{n-1})]\gamma\omega^{-n}$ niedriger ist, als die niedrigste Differentialinvariante der vorgelegten Gruppe dies verträgt. Denn sind etwa n_1 und n_2 die Ordnungen der beiden ungemischten invarianten Differentialgleichungen, wobei $2 < n_1, n_2 < r - 1$ sein möge, so erhalten wir die beiden folgenden invarianten Ausdrücke

$$[y_{n_1} - \varphi_1(e_{n_1-1})]\gamma\omega^{-n_1} \qquad \text{und} \qquad [y_{n_2} - \varphi_2(e_{n_2-1})]\gamma\omega^{-n_2}.$$

Bei Gruppen G_r, welche die Elemente e_{r-2} transitiv vertauschen, sind nun das niedrigste invariante Bogenelement ωdx und die *Pfaff*sche Grundinvariante $\gamma(dy - y_1 dx)$ allgemein nur von $x, y, y_1, \ldots, y_{r-2}$ abhängig, so daß also die beiden obigen Ausdrücke von $(r-2)$. Ordnung sind. Bei Gruppen der angenommenen Art muß aber die niedrigste ungemischte Differentialinvariante von mindestens $(r-1)$. Ordnung sein; daher müssen sich die beiden obigen Ausdrücke auf Konstanten reduzieren, also muß gelten

$$[y_{n_1} - \varphi_1(e_{n_1-1})]\gamma\omega^{-n_1} = c_1, \qquad [y_{n_2} - \varphi_2(e_{n_2-1})]\gamma\omega^{-n_2} = c_2$$

oder

$$y_{n_1} - \varphi_1(e_{n_1-1}) = \omega^{n_1}\gamma^{-1}, \qquad y_{n_2} - \varphi_2(e_{n_2-1}) = \omega^{n_2}\gamma^{-1},$$

wenn wir annehmen, daß die konstanten Faktoren von ω und γ aufgesogen worden sind. Hiermit ist die Möglichkeit gewonnen, ω und γ völlig integrationslos aus den gegebenen infinitesimalen Transformationen der Gruppe zu berechnen. Es ergibt sich

$$\omega = [y_{n_1} - \varphi_1(e_{n_1-1})]^{\frac{1}{n_1-n_2}}[y_{n_2} - \varphi_2(e_{n_2-1})]^{-\frac{1}{n_1-n_2}},$$

$$\gamma = [y_{n_1} - \varphi_1(e_{n_1-1})]^{\frac{n_2}{n_1-n_2}}[y_{n_2} - \varphi_2(e_{n_2-1})]^{-\frac{n_1}{n_1-n_2}}.$$

Kennt man nun bei der Gruppe G_r außerdem noch eine invariante Beziehung zwischen einem Kurvenelement $(\varrho_1 - 2)$. Ordnung und einem Kurvenelement $(\varrho_2 - 2)$. Ordnung $(\varrho_1 + \varrho_2 = r)$ in Form einer gemischten invarianten Differentialgleichung

$$y_{n_3} - \varphi_3(E_{\varrho_1-2}, e_{n_3-1}) = 0, \qquad (n_3 = \varrho_2 - 1)$$

so stellt der Ausdruck

$$[y_{n_3} - \varphi_3(E_{\varrho_1-2}, e_{n_3-1})]\gamma\omega^{-n_3}$$

eine gemischte Differentialinvariante, also eventuell eine der gesuchten Relativkoordinaten dar. ω und γ können dabei durch ihre oben berechneten Ausdrücke ersetzt werden

Alle oben gemachten Annahmen treffen nun bei unserer Gruppe G_{10} zu. Es gibt bei ihr (s. *G. Noth*, Dissertation) eine ungemischte invariante Differentialgleichung von 7. und eine solche von 3. Ordnung; sie sind bei *G. Noth* ausführlich angegeben und lauten allgemein

$$y_7 - \varphi_1(e_6) = 0, \qquad y_3 - \varphi_2(e_2) = 0.$$

Die zweite reduziert sich auf $y_3 = 0$. Infolgedessen lassen sich, da G_{10} die Elemente 8. Ordnung transitiv vertauscht, also die niedrigste ungemischte Differential-

invariante von mindestens 9. Ordnung sein muß, $\omega(e_8)dx$ und $\gamma(e_8)(dy - y_1 dx)$ nach obigem Verfahren bestimmen, und man findet aus

$$y_7 - \varphi_1 = \omega^7 \gamma^{-1}, \qquad y_3 = \omega^3 \gamma^{-1}$$

für ω und γ folgende Ausdrücke

$$\omega = (y_7 - \varphi_1)^{\frac{1}{4}} y_3^{-\frac{1}{4}}, \qquad \gamma = (y_7 - \varphi_1)^{\frac{3}{4}} y_3^{-\frac{7}{4}}.$$

Da wir eine Relativkoordinate eines Linienelementes $E_1(X, Y, Y_1)$ in bezug auf das Kurvenelement $e_8(x, y, y_1, \ldots, y_8)$ suchen, so müssen wir noch nach einer invarianten Beziehung zwischen dem Linienelement E_1 und einem Kurvenelement von 5. Ordnung forschen. Eine solche Beziehung existiert tatsächlich, und zwar findet man sie rechnerisch dadurch, daß man die gegebenen infinitesimalen Transformationen der Gruppe G_{10} auf ein Element 1. Ordnung E_1 und ein solches von 5 Ordnung e_5 erweitert und die so entstehende zehnreihige Determinante gleich Null setzt. Über die Berechnung dieser invarianten Differentialgleichung sowie über die Methode, die zu ihrer Bestimmung führt, wird weiter unten noch gesprochen werden. Es sei vorläufig angegeben, daß man durch Berechnung jener Determinante ein Produkt erhält dessen einer Faktor gleich Null gesetzt die gesuchte gemischte invariante Differentialgleichung

$$(3y_3y_5 - 5y_4^2) - 5y_3y_4\lambda^{-1}\mu - 15y_3^3\lambda^{-1}(x - X) - 5y_3^2\lambda^{-2}\mu^2 = 0$$

vorstellt. Hierbei ist

$$\lambda = y - Y - (x - X)\frac{y_1 + Y_1}{2}, \qquad \mu = y_1 - Y_1 - (x - X)y_2.$$

Setzen wir die linke Seite identisch φ [1]), so ist $y_3^{-1}\varphi = 0$ eine gemischte invariante Differentialgleichung von der Form

$$3y_5 - \Phi = 0,$$

also ist

$$y_3^{-1}\varphi\omega^{-5}\gamma$$

die gesuchte gemischte Differentialinvariante. Setzen wir noch die für ω und γ gefundenen Werte ein, so erhalten wir als die eine der gesuchten Relativkoordinaten

$$u = (y_7 - \varphi_1)^{-\frac{1}{2}} \varphi y_3^{-\frac{3}{2}}.$$

Sie ist in den kleinen Buchstaben von 7. Ordnung.

Berechnung der gemischten invarianten Differentialgleichung $\Delta(E_1, e_5) = 0$.

Da die Berechnung der Determinante $\Delta(E_1, e_5)$ technisch nicht ganz leicht durchzuführen war, soll hier angedeutet werden, wie man den Wert der Determinante erhielt. Bezüglich der Methode sei auf folgenden grundlegenden Satz *Lies* verwiesen (Math. Ann. XXXII. S: 219): *Sucht man alle bei einer vorgelegten Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$ invarianten Differentialgleichungen $f(x, y, y_1, \ldots, y_m) = 0$, deren Ordnungszahl m nicht größer ist als $(r - 2)$, so muß man die Determinante $\Delta = |\xi^i \eta^i \eta_1^i \ldots \eta_{r-2}^i|$ $(i = 1, \ldots r)$ bilden. Verschwindet dieselbe nicht identisch,*

[1]) Geometrisch bedeutet $\varphi = 0$, daß das Element E_1 und das Element e_5 beide ein und derselben Minimalkurve angehören.

so liefern ihre Faktoren gleich Null gesetzt die gesuchten Differentialgleichungen. $X_1 f, \ldots, X_r f$ bedeuten hier die gegebenen infinitesimalen Transformationen der Gruppe. Auf Grund dieses Satzes hat *G. Noth* die beiden ungemischten Differentialgleichungen der Gruppe G_{10}, $y_3 = 0$ und $y_7 - \varphi_1 = 0$, die oben benutzt wurden, gefunden. Der *Lie*sche Satz bleibt auch dann noch gültig, wenn man eine gemischte Erweiterung der Gruppe vornimmt, etwa auf ein Kurvenelement $(\varrho - 2)$. und ein solches von $(\sigma - 2)$. Ordnung, wenn nur $\varrho + \sigma = r$ ist, da sonst keine Determinante entstehen würde. In unserem Falle folgt aus $\varrho - 2 = 1$, $\sigma - 2 = 5$ tatsächlich $\varrho + \sigma = 10$, der obige Satz kann also ohne weiteres angewendet werden. Die gemischt erweiterten infinitesimalen Transformationen der Gruppe G_{10} lauten

$$P + p, \qquad Q + q, \qquad XQ + Q_1 + xq + q_1,$$

$$\tfrac{1}{2} X^2 Q + XQ_1 + \tfrac{1}{2} x^2 q + xq_1 + q_2,$$

$$XP - Y_1 Q_1 + xp - y_1 q_1 - 2y_2 q_2 - 3y_3 q_3 - 4y_4 q_4 - 5y_5 q_5,$$

$$Y_1 P + \tfrac{1}{2} Y_1^2 Q + y_1 p + \tfrac{1}{2} y_1^2 q - y_2^2 q_2 - 3y_2 y_3 q_3 - (4y_2 y_4 + 3y_3^2) q_4 - (5y_2 y_5 + 10 y_3 y_4) q_5,$$

$$XP + 2YQ + Y_1 Q_1 + xp + 2yq + y_1 q_1 - y_3 q_3 - 2y_4 q_4 - 3y_5 q_5,$$

$$\begin{aligned}(Y - XY_1)P - \tfrac{1}{2} XY_1^2 Q - \tfrac{1}{2} Y_1^2 Q_1 + (y - xy_1)p - \tfrac{1}{2} xy_1^2 q - \tfrac{1}{2} y_1^2 q_1 - (y_1 y_2 - xy_2^2) q_2 \\ - (y_1 y_3 - 3xy_2 y_3) q_3 - (y_1 y_4 - 2y_2 y_3 - 4xy_2 y_4 - 3xy_3^2) q_4 \\ - (y_1 y_5 - 5y_2 y_4 - 5y_3^2 - 5xy_2 y_5 - 10 xy_3 y_4) q_5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2} X^2 P + XYQ + YQ_1 + \tfrac{1}{2} x^2 p + xyq + yq_1 + (y_1 - xy_2) q_2 - 2xy_3 q_3 \\ - (2y_3 + 3xy_4) q_4 - (5y_4 + 4xy_5) q_5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(XY - \tfrac{1}{2} X^2 Y_1) P + (Y^2 - \tfrac{1}{4} X^2 Y_1^2) Q + (YY_1 - \tfrac{1}{2} XY_1^2) Q_1 \\ + (xy - \tfrac{1}{2} x^2 y_1) p + (y^2 - \tfrac{1}{4} x^2 y_1^2) q \\ + (yy_1 - \tfrac{1}{2} xy_1^2) q_1 + (\tfrac{1}{2} y_1^2 - xy_1 y_2 + \tfrac{1}{2} x^2 y_2^2) q_2 - (xy_1 y_3 + yy_3 - \tfrac{3}{2} x^2 y_2 y_3) q_3 \\ - (xy_1 y_4 - 2xy_2 y_3 + 2y_1 y_3 + 2yy_4 - 2x^2 y_2 y_4 - \tfrac{3}{2} x^2 y_3^2) q_4 \\ - (xy_1 y_5 - 5xy_2 y_4 + 5y_1 y_4 - 5xy_3^2 + 3yy_5 - \tfrac{5}{2} x^2 y_2 y_5 - 5x^2 y_3 y_4) q_5.\end{aligned}$$

Werden die Koeffizienten von $P, Q, Q_1, p, q, q_1, \ldots, q_5$ mit $\Xi^i, \mathsf{H}^i, \mathsf{H}_1^i, \xi^i, \eta^i, \eta_1^i, \ldots, \eta_5^i$ bezeichnet $(i = 1, 2, \ldots, 10)$, so müssen wir also nach *Lies* Satz die Determinante

$$\Delta = | \Xi^i \mathsf{H}^i \mathsf{H}_1^i \xi^i \eta^i \eta_1^i \ldots \eta_5^i | \qquad (i = 1, 2, \ldots, 10)$$

berechnen. Ihre Faktoren liefern uns gleich Null gesetzt die gesuchten Differentialgleichungen. Es liegt nun nahe, an dieser Determinante gewisse Vereinfachungen vorzunehmen. Zunächst erkennt man sofort, daß sich die zehnreihige Determinante auf eine siebenreihige reduziert, wenn man von der vierten Spalte die erste subtrahiert, von der fünften die zweite, von der sechsten die dritte, darauf von der fünften die mit $(x - X)$ multiplizierte dritte und schließlich von der zweiten die mit X multiplizierte dritte Spalte. Die siebenreihige Determinante kann aber noch auf eine sechsreihige reduziert werden durch folgende Operationen, die in der angegebenen Reihenfolge vorgenommen werden müssen: man addiere zur achten Zeile die mit x multiplizierte siebente, zur zehnten die mit $\frac{1}{2} x^2$ multiplizierte siebente Zeile; darauf subtrahiere man von der siebenten Zeile die mit y_2 multiplizierte fünfte und von der zehnten die mit x multiplizierte achte Zeile; nun wird die sechste Zeile mit y_1 multipliziert und zur achten addiert, darauf mit 3 multipliziert und zur fünften addiert, schließlich, nachdem man sie mit 2 multipliziert, die fünfte von ihr subtrahiert und die entstehenden Glieder mit x multipliziert hat, zur neunten Zeile

addiert. Die drei letzten Schritte endlich bestehen darin, daß man von der zehnten Zeile die mit y_1 multiplizierte neunte subtrahiert, darauf zu ihr die mit y multiplizierte Differenz aus der sechsten weniger der fünften Zeile addiert und schließlich zur achten Zeile die mit y_2 multiplizierte neunte hinzufügt. Hat man alle diese Operationen ausgeführt, so erhält man folgende sechsreihige Determinante

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
0 & \frac{1}{2}(x-X) & x-X & 1 & 0 & 0 \\
(x-X)\left[(x-X)\frac{y_1+Y_1}{2}-(y-Y)\right] & -[y-Y-\frac{1}{2}Y_1(x-X)]^2 & (y-Y)(Y_1-y_1)-\frac{1}{2}Y_1^2(x-X) & -\frac{1}{2}y_1^2 & 0 & 0 \\
x-X & 3(y-Y)-2Y_1(x-X) & 2(y_1-Y_1) & y_2 & -y_4 & -2y_5 \\
y_1-Y_1-y_2(x-X) & \frac{1}{2}(y_1^2-Y_1^2)-y_2(x-X)Y_1 & y_2(y_1-Y_1) & y_2^2 & -3y_3^2 & -10y_3y_5 \\
y-Y-Y_1(x-X)-\frac{1}{2}y_2(x-X)^2 & y_1(y-Y)-y_1(x-X)Y_1 & \frac{1}{2}(y_1-Y_1)^2+y_2(y-Y) & y_1y_2 & 0 & 5y_3^2 \\
-\frac{1}{2}(x-X)^2 & 0 & y-Y & y_1 & -2y_3 & -5y_4
\end{array}$$

Vor sie tritt noch y_3 als Faktor. Diese Determinante muß nun nach dem *Laplace*schen Satz entwickelt werden und zwar am besten nach den Unterdeterminanten der fünften und sechsten Spalte. Im Laufe der Rechnung kehren gewisse Verbindungen der großen und kleinen Buchstaben immer wieder, nämlich

$$\lambda = y - Y - (x-X)\frac{y_1+Y_1}{2}, \qquad \mu = y_1 - Y_1 - (x-X)y_2,$$

so daß man als Wert der Determinante schließlich erhält

$$\Delta(E_1, e_5) = y_3^2\lambda^4[(3y_3y_5 - 5y_4^2) - 5y_3y_4\lambda^{-1}\mu - 15y_3^3\lambda^{-1}(x-X) - 5y_3^2\lambda^{-2}\mu^2].$$

Gleich Null gesetzt liefert sie also tatsächlich die oben angegebene invariante Differentialgleichung zwischen E_1 und e_5.

Der Satz von *Kowalewski* über die *Lie*sche Determinante Δ.

Die Bestimmung der beiden anderen Relativkoordinaten erfordert die Kenntnis eines von *G. Kowalewski* aufgestellten Satzes über die *Lie*sche Determinante Δ (Leipz. Ber. 25. II. 1924), der hier ausführlich für ungemischt und gemischt erweiterte Gruppen von Berührungstransformationen bewiesen werden soll und der in seinem endgültigen Ergebnis besagt, daß man bei jeder irreduziblen Berührungstransformationsgruppe der Ebene die Differentialinvarianten ohne Integration aus den infinitesimalen Transformationen gewinnen kann.

a) Beweis für ungemischt erweiterte Gruppen von Berührungstransformationen.

Eine r-gliedrige Gruppe G_r von Berührungstransformationen habe folgende endliche Transformationsgleichungen

$$x' = F(x, y, y_1, a_1, \ldots, a_r), \quad y' = G(x, y, y_1, a_1, \ldots, a_r), \quad y_1' = H(x, y, y_1, a_1, \ldots, a_r).$$

Die auf die Ordnung $(r-2)$ erweiterten infinitesimalen Transformationen

$$X^i f \qquad [i = 1, \ldots, r]$$

können durch das Symbol ausgedrückt werden

$$X^i f = \xi^i p + \eta^i q + \eta_1^i q_1 + \cdots + \eta_{r-2}^i q_{r-2}. \qquad [i = 1, \ldots, r]$$

Nun vertauschen die endlichen Transformationen der Gruppe die infinitesimalen Transformationen in bestimmter Weise. Wenden wir also auf ein $X^i f$ eine beliebige endliche Transformation der Gruppe an, so erhalten wir

$$X^{i'}f = \Sigma c X^k f$$

oder ausführlich geschrieben

$$\xi^{i'}p' + \eta^{i'}q' + \eta_1^{i'}q_1' + \cdots + \eta_{r-2}^{i'}q_{r-2}' = \Sigma c\,(\xi^k p + \eta^k q + \eta_1^k q_1 + \cdots + \eta_{r-2}^k q_{r-2}).$$

Ferner gelten die Beziehungen

$$p = p'\frac{\partial x'}{\partial x} + q'\frac{\partial y'}{\partial x} + q_1'\frac{\partial y_1'}{\partial x} + \cdots \quad + q_{r-2}'\frac{\partial y_{r-2}'}{\partial x}$$

$$q = p'\frac{\partial x'}{\partial y} + q'\frac{\partial y'}{\partial y} + q_1'\frac{\partial y_1'}{\partial y} + \cdots \quad + q_{r-2}'\frac{\partial y_{r-2}'}{\partial y}$$

$$q_1 = p'\frac{\partial x'}{\partial y_1} + q'\frac{\partial y'}{\partial y_1} + q_1'\frac{\partial y_1'}{\partial y_1} + \cdots \quad + q_{r-2}'\frac{\partial y_{r-2}'}{\partial y_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_{r-2} = p'\frac{\partial x'}{\partial y_{r-2}} + q'\frac{\partial y'}{\partial y_{r-2}} + q_1'\frac{\partial y_1'}{\partial y_{r-2}} + \cdots \quad + q_{r-2}'\frac{\partial y_{r-2}'}{\partial y_{r-2}}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die obige Gleichung ein, so nimmt sie folgende Gestalt an

$$\xi^{i'}p' + \eta^{i'}q' + \eta_1^{i'}q_1' + \cdots + \eta_{r-2}^{i'}q_{r-2}'$$

$$= \Sigma c\Big\{\Big(\xi^k\frac{\partial x'}{\partial x} + \cdots + \eta_{r-2}^k\frac{\partial x'}{\partial y_{r-2}}\Big)p' + \Big(\xi^k\frac{\partial y'}{\partial x} + \cdots + \eta_{r-2}^k\frac{\partial y'}{\partial y_{r-2}}\Big)q' + \cdots$$

$$+\Big(\xi^k\frac{\partial y_{r-2}'}{\partial x} + \cdots + \eta_{r-2}^k\frac{\partial y_{r-2}'}{\partial y_{r-2}}\Big)q_{r-2}'\Big\}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\Delta' = C\,\frac{\partial(x', y', y_1', \ldots, y_{r-2}')}{\partial(x, y, y_1, \ldots, y_{r-2})}\,\Delta.$$

C ist hierbei die Determinante der r^2 Koeffizienten c [1]). Die hier auftretende Funktionaldeterminante kann nun noch in folgender Weise umgeformt werden. Aus den endlichen Gleichungen der Gruppe folgt

$$y_2' = \frac{dy_1'}{dx'} = \frac{H_x + y_1H_y + y_2H_{y_1}}{F_x + y_1F_y + y_2F_{y_1}};$$

um

$$y_3' = \frac{dy_2'}{dx'} = \frac{\dfrac{\partial y_2'}{\partial x} + \dfrac{\partial y_2'}{\partial y}y_1 + \dfrac{\partial y_2'}{\partial y_1}y_2 + \dfrac{\partial y_2'}{\partial y_2}y_3}{F_x + y_1F_y + y_2F_{y_1}}$$

bilden zu können, brauchen wir

$$\frac{\partial y_2'}{\partial y_2} = \frac{H_{y_1}(F_x + y_1F_y) - F_{y_1}(H_x + y_1H_y)}{(F_x + y_1F_y + y_2F_{y_1})^2}.$$

Der Zähler dieses Ausdruckes hat gerade die Form des *Poisson*schen Klammerausdruckes und kann daher $[HF]$ geschrieben werden; also folgt

$$\frac{\partial y_2'}{\partial y_2} = [HF](F_x + y_1F_y + y_2F_{y_1})^{-2}$$

---

[1]) Bei der hier betrachteten Gruppe G_{10} hat sie den Wert 1, wovon in dieser Arbeit jedoch kein Gebrauch gemacht wird.

und

$$y_3' = [HF](F_x + y_1F_y + y_2F_{y_1})^{-3}y_3 + \cdots .$$

Die Punkte in der letzten Gleichung deuten die Glieder an, die Ableitungen von niedrigerer Ordnung als die dritte enthalten. In derselben Weise würde man erhalten

$$\frac{\partial y_3'}{\partial y_3} = [HF](F_x + y_1F_y + y_2F_{y_1})^{-3}, \qquad \frac{\partial y_4'}{\partial y_4} = [HF](F_x + y_1F_y + y_2F_{y_1})^{-4} \quad \text{u. s. f.}$$

Die Funktionaldeterminante lautet dann unter Einsetzung dieser Ausdrücke

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y_1'}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_{r-2}'}{\partial x} \\ \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y_1'}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial y_{r-2}'}{\partial y} \\ \frac{\partial x'}{\partial y_1} & \frac{\partial y'}{\partial y_1} & \frac{\partial y_1'}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial y_{r-2}'}{\partial y_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{[HF]}{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2} \cdots & \frac{\partial y_{r-2}'}{\partial y_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \quad \frac{[HF]}{\left(\frac{dF}{dx}\right)^3} \cdots & \frac{\partial y_{r-2}'}{\partial y_3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{[HF]}{\left(\frac{dF}{dx}\right)^{r-2}} \end{vmatrix} = \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, y_1)}[HF]^{r-3}\left(\frac{dF}{dx}\right)^{\frac{-r(r-3)}{2}}.$$

Nun kann auch die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, y_1)}$ noch durch $[HF]$ ausgedrückt werden. Es gilt nämlich allgemein für jede Berührungstransformation (vergl. z. B. *Lie-Scheffers*, Geom. d. Ber.-Trans. S. 71)

$$dG - HdF = [HF](dy - y_1dx).$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial G}{\partial x} - H\frac{\partial F}{\partial x} = -[HF]y_1,$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} - H\frac{\partial F}{\partial y} = [HF],$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_1} - H\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0.$$

Auf Grund dieser Relationen kann man leicht bestätigen, daß

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, y_1)} = [HF]^2;$$

denn die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, y_1)}$ lautet ausführlich geschrieben

$$\begin{vmatrix} F_x & G_x & H_x \\ F_y & G_y & H_y \\ F_{y_1} & G_{y_1} & H_{y_1} \end{vmatrix}.$$

Subtrahiert man von der zweiten Spalte die mit H multipizierte erste Spalte, so treten in der zweiten Spalte gerade die Ausdrücke auf, die soeben berechnet wurden. Setzen wir also die dafür gefundenen Werte ein, so lautet die neue Determinante

$$\begin{vmatrix} F_x & -y_1[HF] & H_x \\ F_y & [HF] & H_y \\ F_{y_1} & 0 & H_{y_1} \end{vmatrix} = [HF]\{H_{y_1}(F_x + y_1F_y) - F_{y_1}(H_x + y_1H_y)\}.$$

Der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck ist aber wieder $[HF]$, also folgt tatsächlich, daß die Determinante den Wert $[HF]^2$ hat. Für die Funktionaldeterminante der erweiterten Berührungstransformation erhält man durch Einsetzen dieses Wertes

$$\frac{\partial(x', y', y_1', \ldots, y_{r-2}')}{\partial(x, y, y_1, \ldots, y_{r-2})} = [HF]^{r-1}\left(\frac{dF}{dx}\right)^{\frac{-r(r-3)}{2}}.$$

Da das Bogenelement ωdx und die *Pfaff*sche Grundinvariante $\gamma(dy - y_1dx)$ Invarianten der Gruppe G_r sind, so gilt

$$\omega' dx' = \omega dx$$
$$\gamma'(dy' - y_1'dx') = \gamma(dy - y_1dx),$$

wobei die Striche, wie bisher, die Ausübung einer endlichen Transformation der Gruppe bedeuten. Die zweite der obigen Relationen können wir noch etwas anders schreiben, indem wir bedenken, daß

$$dy' - y_1'dx' = [HF](dy - y_1dx);$$

dann folgt

$$\gamma'[HF] = \gamma, \qquad \text{also} \quad [HF] = \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

Aus der ersten Relation ergibt sich

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\omega}{\omega'}.$$

Setzt man dies ein in unseren für Δ' gefundenen Ausdruck

$$\Delta' = C[HF]^{r-1}\left(\frac{dF}{dx}\right)^{\frac{-r(r-3)}{2}} \Delta,$$

so erhält man

$$\Delta' = C\left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right)^{r-1}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^{\frac{-r(r-3)}{2}} \Delta.$$

Hieraus folgt

$$\gamma'^{r-1}\omega'^{\frac{-r(r-3)}{2}}\Delta' = C\gamma^{r-1}\omega^{\frac{-r(r-3)}{2}}\Delta.$$

Der Ausdruck

$$D = \gamma^{r-1}\omega^{\frac{-r(r-3)}{2}}\Delta$$

hat somit die Eigenschaft, sich bei jeder Transformation der Gruppe bis auf einen konstanten Faktor zu reproduzieren.

b) Beweis für gemischt erweiterte Gruppen von Berührungstransformationen.

Wir gehen aus von der Determinante $\Delta(E_{\varrho-2}, e_{\sigma-2})$, $\varrho+\sigma=r$, und erhalten in Analogie zu den obigen Entwicklungen

$$P = P'\frac{\partial X'}{\partial X} + Q'\frac{\partial Y'}{\partial X} + Q'_1\frac{\partial Y'_1}{\partial X} + \cdots + Q'_{\varrho-2}\frac{\partial Y'_{\varrho-2}}{\partial X}$$

$$Q = P'\frac{\partial X'}{\partial Y} + Q'\frac{\partial Y'}{\partial Y} + Q'_1\frac{\partial Y'_1}{\partial Y} + \cdots + Q'_{\varrho-2}\frac{\partial Y'_{\varrho-2}}{\partial Y}$$

$$\cdots\cdots\cdots

Führt man wieder ein

$$[y_1' x'] = \frac{\gamma}{\gamma'}, \qquad \frac{dx'}{dx} = \frac{\omega}{\omega'},$$

so ergibt sich

$$(*) \qquad \Delta' = C[Y_1' X']^{\varrho-1}\left(\frac{dX'}{dX}\right)^{\frac{-\varrho(\varrho-3)}{2}}\left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right)^{\sigma-1}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^{\frac{-\sigma(\sigma-3)}{2}}\Delta$$

oder

$$\gamma'^{\sigma-1}\omega'^{\frac{-\sigma(\sigma-3)}{2}}\Delta' = C[Y_1'X']^{\varrho-1}\left(\frac{dX'}{dX}\right)^{\frac{-\varrho(\varrho-3)}{2}}\gamma^{\sigma-1}\omega^{-\frac{\sigma(\sigma-3)}{2}}\Delta,$$

d. h. der Ausdruck

$$D = \gamma^{\sigma-1}\omega^{-\frac{\sigma(\sigma-3)}{2}}\Delta$$

hat die Eigenschaft, sich bei Anwendung einer Transformation der Gruppe bis auf den Faktor

$$C[Y_1' X']^{\varrho-1}\left(\frac{dX'}{dX}\right)^{\frac{-\varrho(\varrho-3)}{2}} \qquad (\varrho+\sigma=r)$$

zu reproduzieren.

In unserem besonderen Falle der Determinante $\Delta(E_1, e_5)$ ist $\varrho - 2 = 1$, $\sigma - 2 = 5$, und man erkennt durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung (*), daß sie sich auf die folgende reduziert

$$\gamma'^{6}\omega'^{-14}\Delta' = C[Y_1' X']^2\gamma^6\omega^{-14}\Delta.$$

Führt man noch den oben gefundenen Wert unserer Determinante $\Delta(E_1, e_5)$ ein, nämlich

$$\Delta(E_1, e_5) = y_3^2\lambda^4\varphi,$$

und nimmt auch für ω und γ die früher berechneten Werte als bekannt an, so findet man als Spezialfall des obigen allgemeinen Satzes den folgenden: Der Ausdruck

$$^i\Psi = \gamma^6\omega^{-14}y_3^2\lambda^4\varphi,$$

der zur vorliegenden zehngliedrigen Gruppe G_{10} von Berührungstransformationen gehört, hat die Eigenschaft, sich bei Anwendung einer Transformation der Gruppe mit dem Faktor $C[Y_1' X']^2$ zu reproduzieren.

Berechnung der beiden noch fehlenden Relativkoordinaten für die Gruppe G_{10}.

Auf Grund des obigen Satzes können nun die beiden noch fehlenden Relativkoordinaten gefunden werden. Um zunächst die eine der beiden zu bestimmen, eliminieren wir aus dem eben gefundenen Ausdruck

$$^i\Psi = \gamma^6\omega^{-14}y_3^2\lambda^4\varphi$$

die Größe γ mit Hilfe der S. 80 abgeleiteten Beziehung

$$\gamma = \omega^3 y_3^{-1}$$

und erhalten

$$^i\Psi = y_3^{-4}\lambda^4\varphi\,\omega^4.$$

Nun hat unsere oben gefundene erste Relativkoordinate

$$u = y_3^{-2}\varphi\,\omega^{-2}$$

die Invarianteneigenschaft. Es ist also

$$y_3'^{-2}\varphi'\omega'^{-2} = y_3^{-2}\varphi\omega^{-2}.$$

Andererseits galt

$$^i\Psi' = C[Y_1'X']^2\,{}^i\Psi,$$

also

$$(**) \qquad y_3'^{-4}\lambda'^4\varphi'\omega'^4 = C[Y_1'X']^2 y_3^{-4}\lambda^4\varphi\omega^4.$$

Aus Gleichung (*) und (**) kann man φ eliminieren und erhält

$$y_3'^{-2}\lambda'^4\omega'^6 = C[Y_1'X']^2 y_3^{-2}\lambda^4\omega^6.$$

Differentiiert man diesen Ausdruck logarithmisch nach s unter Festhaltung der großen Buchstaben, so erkennt man sofort, daß der Faktor $C[Y_1'X']^2$ herausfällt. Da ferner

$$ds' = \omega' dx' = \omega dx = ds,$$

so folgt

$$2\frac{dln\lambda'}{ds'} + \frac{dln(\omega'^3 y_3'^{-1})}{ds'} = 2\frac{dln\lambda}{ds} + \frac{dln(\omega^3 y_3^{-1})}{ds}.$$

Setzen wir noch ein

$$2\frac{dln\lambda}{ds} = \omega^{-1}\lambda^{-1}\mu,$$

so erhalten wir als zweite Relativkoordinate

$$v = \omega^{-1}\lambda^{-1}\mu + \frac{dln(\omega^3 y_3^{-1})}{ds}.$$

Die Spaltung in zwei Summanden ist deshalb von Vorteil, weil nur der erste Summand in $\lambda^{-1}\mu$ die großen Buchstaben enthält; v ist wegen des zweiten Summanden, der die Ableitung von $\omega(e_7)$ nach x enthält, von 8. Ordnung in den kleinen Buchstaben und außerdem gegenüber Transformationen der Gruppe invariant.

Die noch fehlende dritte Relativkoordinate finden wir, indem wir u logarithmisch nach s differentiieren. Es ergibt sich

$$w = \frac{dln\varphi}{ds} + \frac{dln(\omega^{-2} y_3^{-2})}{ds}.$$

w ist ebenfalls von 8. Ordnung in den kleinen Buchstaben und erfüllt die Forderung, gegenüber Transformationen der Gruppe invariant zu bleiben, da u und ds Invarianten sind. Es zeigt sich, daß u, v, w in bezug auf X, Y, Y_1 voneinander unabhängig sind.

II. Die niedrigste ungemischte Differentialinvariante der Gruppe G_{10}.

Die niedrigste ungemischte Differentialinvariante der Gruppe G_{10} muß, wie die allgemeine Theorie besagt, mindestens von 9. Ordnung sein, da die Determinante $\Delta(e_8)$ nicht identisch verschwindet, und es kann im wesentlichen nur e i n e solche Differentialinvariante $I(e_9)$ geben.

Die Methode, die zu ihrer Bestimmung führt, erfordert nur Differentiationen und Eliminationen. Bilden wir nämlich

$$\frac{dv}{ds} \equiv \frac{dv}{\omega dx} = -\omega^{-2}\left\{\omega^{-1}\lambda^{-1}\mu\omega_1 + \frac{1}{2}\lambda^{-2}\mu^2 + \lambda^{-1}y_3(x-X)\right\} + \frac{d^2ln(\omega^3 y_3^{-1})}{ds^2},$$

wobei

$$\omega_1 = \frac{d\omega}{dx},$$

so haben wir eine mit e_9 behaftete gemischte Differentialinvariante vor uns, und wir erkennen, daß sich unsere gesuchte Differentialinvariante $I(e_9)$ durch Elimination von X, Y, Y_1 aus u, v, w und $\frac{dv}{ds}$ berechnen läßt. Wir können uns aber die Rechnung noch vereinfachen, indem wir darauf achten, daß u, v und $\frac{dv}{ds}$ die großen Buchstaben nur in den beiden Verbindungen $\lambda^{-1}\mu$ und $\lambda^{-1}(x - X)$ enthalten. Bei v und $\frac{dv}{ds}$ liegt es auf der Hand, u enthält die großen Buchstaben nur in φ, dieses sie aber wieder nur in den angegebenen Verbindungen. Die Bestimmung unserer Differentialinvariante $I(e_9)$ reduziert sich daher auf die Lösung der Aufgabe, aus u, v und $\frac{dv}{ds}$ die Verbindungen $\lambda^{-1}\mu$ und $\lambda^{-1}(x - X)$ zu eliminieren. Der größeren Zweckmäßigkeit halber wählen wir zur Elimination die Verbindungen

$$\omega^{-1}\lambda^{-1}\mu \equiv L \quad \text{und} \quad \omega^{-2}\lambda^{-2}y_3(x - X) \equiv M.$$

Das Eliminationsergebnis liefert einen Ausdruck $F\left(u, v, \frac{dv}{ds}\right)$, welcher frei von L und M ist und die gesuchte niedrigste Differentialinvariante $I(e_9)$ darstellt. Nach Einführung der Verbindungen L und M nehmen u, v und $\frac{dv}{ds}$ die Form an

$$u = \omega^{-2}y_3^{-2}(3y_3y_5 - 5y_4^2) - 5\omega^{-1}y_3^{-1}y_4L - 15M - 5L^2,$$

$$v = L + \frac{dln(\omega^3y_3^{-1})}{ds},$$

$$\frac{dv}{ds} = -\omega^{-2}\omega_1 L - M - \frac{1}{2}L^2 + \frac{d^2ln(\omega^3y_3^{-1})}{ds^2}.$$

Die Durchführung der Elimination liefert wegen

$$L = v - \frac{dln(\omega^3y_3^{-1})}{ds}$$

folgende Beziehung

$$u - 15\frac{dv}{ds} = \omega^{-2}y_3^{-2}\left\{(3y_3y_5 - 5y_4^2) - 15\frac{d^2ln(\omega^3y_3^{-1})}{ds^2} - \frac{dln(\omega^3y_3^{-1})}{ds}(15\omega^{-2}\omega_1 - 5\omega^{-1}y_3^{-1}y_4)\right.$$
$$\left. + \frac{5}{2}\left(\frac{dln(\omega^3y_3^{-1})}{ds}\right)^2 + 5v\left(3\omega^{-2}\omega_1 - \omega^{-1}y_3^{-1}y_4 - \frac{dln(\omega^3y_3^{-1})}{ds}\right) + \frac{5}{2}v^2.\right.$$

Man bestätigt nun leicht, daß der Faktor von $5v$ verschwindet und der Faktor von $\frac{dln(\omega^3y_3^{-1})}{ds}$ sich auf $5\frac{dln(\omega^3y_3^{-1})}{ds}$ reduziert. Es ergibt sich also folgende Relation

$$u - 15\frac{dv}{ds} - \frac{5}{2}v^2 = \omega^{-2}y_3^{-2}(3y_3y_5 - 5y_4^2) - \frac{5}{2}\left(\frac{dln(\omega^3y_3^{-1})}{ds}\right)^2 - 15\frac{d^2ln(\omega^3y_3^{-1})}{ds^2}.$$

Dieser Ausdruck stellt die gesuchte Differentialinvariante $I(e_9)$ dar, denn er ist eine von L und M freie Verbindung von u, v und $\frac{dv}{ds}$.

Wir können ihr noch eine übersichtlichere Form geben, indem wir alle ihre Glieder in die Form von logarithmischen Ableitungen bringen. Um dies durchzuführen, differentiieren wir nicht nach s, sondern nach x, und lösen den 2. Differentialquotienten $\frac{d^2ln(\omega^3 y_3^{-1})}{ds^2}$ folgendermaßen auf

$$\frac{d^2ln(\omega^3 y_3^{-1})}{ds^2} = \omega^{-2}\left\{\frac{d^2ln(\omega^3 y_3^{-1})}{dx^2} - \frac{dln\,\omega}{dx}\,\frac{dln(\omega^3 y_3^{-1})}{dx}\right\}.$$

Führen wir diesen Wert in den obigen Ausdruck für $I(e_9)$ ein, so ergibt sich

$$I(e_9) = \left\{\begin{array}{l} \omega^{-2}\left\{(3y_3^{-1}y_5 - 5y_3^{-2}y_4^2) + 15\,\frac{dln\,\omega}{dx}\,\frac{dln(\omega^3 y_3^{-1})}{dx} - \frac{5}{2}\left(\frac{dln(\omega^3 y_3^{-1})}{dx}\right)^2\right. \\ \left. - 15\,\frac{d^2ln(\omega^3 y_3^{-1})}{dx^2}\right\}. \end{array}\right.$$

Da sich nun auch noch das erste Glied in der Klammer auf die Form bringen läßt

$$3y_3^{-1}y_5 - 5y_3^{-2}y_4^2 = 3\,\frac{d^2ln\,y_3}{dx^2} - 2\left(\frac{dln\,y_3}{dx}\right)^2,$$

so haben wir damit alle Glieder von $I(e_9)$ als logarithmische Ableitungen ausgedrückt. Führen wir noch ein

$$\sigma \equiv \omega^3 y_3^{-1},$$

woraus folgt

$$\frac{dln\,y_3}{dx} = 3\,\frac{dln\,\omega}{dx} - \frac{dln\,\sigma}{dx}, \qquad \frac{d^2ln\,y_3}{dx^2} = 3\,\frac{d^2ln\,\omega}{dx^2} - \frac{d^2ln\,\sigma}{dx^2},$$

so ergibt sich als endgültiger Ausdruck für $I(e_9)$:

$$I(e_9) = \omega^{-2}\left\{\frac{d^2ln\,\omega}{dx^2} - 2\left(\frac{dln\,\omega}{dx}\right)^2 - 2\,\frac{d^2ln\,\sigma}{dx^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{dln\,\sigma}{dx}\right)^2 + 3\,\frac{dln\,\omega}{dx}\,\frac{dln\,\sigma}{dx}\right\}.$$

Man kann auch leicht bestätigen, daß $I(e_9)$ tatsächlich bei Anwendung aller 10 infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe G_{10} invariant bleibt. Auf Grund der von *G. Noth* (Dissertation) angegebenen Tabelle der Klammerausdrücke erkennen wir, daß es genügt, die 5 infinitesimalen Transformationen X_1, X_2, X_3, X_4 und X_8 auf $I(e_9)$ anzuwenden, da aus ihnen durch wiederholte Klammeroperationen die ganze Gruppe entsteht. Es muß sich bei Anwendung der genannten infinitesimalen Transformationen

$$X_1 = p, \qquad X_2 = q, \qquad X_3 = xq + q_1, \qquad X_4 = \frac{1}{2}\,x^2q + xq_1,$$

$$X_8 = (y - xy_1)p - \frac{1}{2}\,xy_1^2q - \frac{1}{2}\,y_1^2q_1$$

auf $I(e_9)$ zeigen, daß

$$\frac{\delta I(e_9)}{\delta t} = 0$$

ist. $\frac{\delta I(e_9)}{\delta t}$ lautet ausführlich geschrieben

$$\frac{\delta I(e_9)}{\delta t} = \left\{ \begin{array}{l} -2\omega^{-3}\frac{\delta\omega}{\delta t}\left\{\delta\frac{d^2ln\omega}{dx^2}-4\frac{dln\omega}{dx}\delta\frac{dln\omega}{dx}-2\delta\frac{d^2ln\sigma}{dx^2}\right. \\ \left. -\frac{dln\sigma}{dx}\delta\frac{dln\sigma}{dx}+3\frac{dln\omega}{dx}\delta\frac{dln\sigma}{dx}+3\frac{dln\sigma}{dx}\delta\frac{dln\omega}{dx}\right\}, \end{array} \right.$$

wobei

$$\frac{\delta\omega}{\delta t} = -\omega\frac{d\xi}{dx},$$

$$\delta\frac{dln\omega}{dx}\Big/\delta t = -\frac{dln\omega}{dx}\frac{d\xi}{dx}-\frac{d^2\xi}{dx^2},$$

$$\delta\frac{d^2ln\omega}{dx^2}\Big/\delta t = -2\frac{d^2ln\omega}{dx^2}\frac{d\xi}{dx}-\frac{dln\omega}{dx}\frac{d^2\xi}{dx^2}-\frac{d^3\xi}{dx^3},$$

$$\frac{\delta ln\sigma}{\delta t} = W_y,$$

$$\delta\frac{dln\sigma}{dx}\Big/\delta t = \frac{dW_y}{dx}-\frac{dln\sigma}{dx}\frac{d\xi}{dx},$$

$$\delta\frac{d^2ln\sigma}{dx^2}\Big/\delta t = \frac{d^2W_y}{dx^2}-\frac{dln\sigma}{dx}\frac{d^2\xi}{dx^2}-2\frac{d\xi}{dx}\frac{d^2ln\sigma}{dx^2}$$

und

$$W_y = y_1\xi_y - \eta_y$$

die partielle Ableitung nach y der charakteristischen Funktion

$$W = y_1\xi - \eta$$

ist. Die Durchführung der Rechnung ergibt tatsächlich bei allen fünf genannten Transformationen $\frac{\delta I(e_9)}{\delta t} = 0$.

III. Berechnung der niedrigsten Relativkoordinate und der Identitätsbedingungen für die Gruppe G_{10}.

Die drei gefundenen Relativkoordinaten waren von 7. und 8. Ordnung in den kleinen Buchstaben, und zwar u von 7., v und w von 8. Ordnung. Man kann nun durch passende Zusammenfassung von u, v und w auch die niedrigste Relativkoordinate finden, welche in den kleinen Buchstaben von 6. Ordnung ist.

Dazu gehen wir folgendermaßen vor: wir schreiben u in der Form

$$u = y_3^{-\frac{8}{3}}\varphi\,\omega^{-2}y_3^{\frac{2}{3}}$$

und bilden

$$w = \frac{dln\,u}{ds} = \frac{dln(y_3^{-\frac{8}{3}}\varphi)}{ds} - \frac{2}{3}\frac{dln(\omega^3 y_3^{-1})}{ds}.$$

Bedenken wir, daß v lautet

$$v = \omega^{-1}\lambda^{-1}\mu + \frac{dln(\omega^3 y_3{}^{-1})}{ds},$$

so läßt sich folgende Verbindung herstellen

$$w + \frac{2}{3}v = \frac{2}{3}\omega^{-1}\lambda^{-1}\mu + \frac{dln(y_3{}^{-\frac{8}{3}}\varphi)}{ds}.$$

Mit Hilfe der Beziehungen

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{2}\mu, \qquad \omega^{-1}\lambda^{-1}\mu = 2\frac{dln\lambda}{ds}, \qquad u^{-\frac{1}{2}} = y_3\varphi^{-\frac{1}{2}}\omega$$

ergibt sich schließlich

$$u^{-\frac{1}{2}}\left(w + \frac{2}{3}v\right) = y_3\varphi^{-\frac{1}{2}}\frac{dln(\lambda^{\frac{4}{3}}y_3{}^{-\frac{8}{3}}\varphi)}{dx}.$$

Der rechten Seite dieser Gleichung sieht man an, daß sie in den kleinen Buchstaben nur von 6. Ordnung ist, während die linke Seite die Invarianteneigenschaft erkennen läßt. Setzen wir die rechte Seite also gleich t, so ist

$$t = y_3\varphi^{-\frac{1}{2}}\frac{dln(\lambda^{\frac{4}{3}}y_3{}^{-\frac{8}{3}}\varphi)}{dx}$$

die gesuchte niedrigste Relativkoordinate.

Schließlich seien noch die Identitätsbedingungen notiert, d. h. die Ausdrücke von $\frac{dt}{ds}$, $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$ durch t, u, v. Sie lauten:

$$\frac{dt}{ds} = 3u^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}t^2 - \frac{1}{30}u^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{du}{ds} = -\frac{2}{3}uv + u^{\frac{3}{2}}t,$$

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{1}{6}v^2 + \frac{u}{15} - \frac{J}{15}.$$

Bei Aufstellung der Formel für $\frac{dt}{ds}$ findet man als Nebenergebnis den Ausdruck für ω, der mit dem von *G. Noth* (Dissertation) angegebenen übereinstimmt.

Elementare Betrachtungen über den Aufbau von Zahlverknüpfungen nach Gesetzen. (2. Note).

Von *Gerhard Stammler* in Halle (Saale).

Inhalt:

		Seite
	Vorbemerkung. Bezeichnungen.	93
§ 1.	Werttripel. Reduktionsregeln	94
§ 2.	Diskussion der Fälle V_ϱ, VI_ϱ, X der Reihe $\mu = 1$	95
§ 3.	Diskussion von IX ($\mu = 1$)	96
§ 4.	Ergebnis	101

Vorbemerkung. Bezeichnungen.

Das Ergebnis unserer ersten Note (*Crelle* 154, II, S. 129 f.) hatte bei der Untersuchung über die Verknüpfung dritter Ordnung [1]) die gewöhnliche iterative Multiplikation als Verknüpfung zweiter Ordnung angenommen. Es war also in dem Ausdruck für die allgemeine Multiplikation:

$$S_2(a, b) = C \cdot a \cdot b,$$

bisher

$$C = 1$$

gesetzt worden.

In der nachstehenden Note wird untersucht, ob sich das angegebene Resultat ändert, wenn $C \neq 1$, also $C \geqq 2$ gesetzt wird [2]).

Im übrigen behalten sämtliche Bezeichnungen ihren bisherigen Sinn: Es bezeichnen a, b, c, $\cdots$ Zahlen aus dem Gebiet der pos. ganzen Zahlen einschl. 0; λ, μ, ν, φ, ψ, χ sind pos. ganze Zahlen > 0. Auch verstehen wir, wie bisher, unter b_a, die Zahl, die die Gleichung erfüllt

$$S_1(a, b_a) = b, \qquad (b \geqq a \geqq 0)$$

und endlich unter k_μ die Zahl, die die Gleichung

$$S_\mu(a, k_\mu) = a$$

für jedes a befriedigt.

An diese Zahl k_μ knüpfen wir einige Bemerkungen an.

---

[1]) Wir ziehen dieses Wort jetzt dem früher gebrauchten „Rang“ vor. Eine Verknüpfung n-ter Ordnung ist also die mit S_n bezeichnete.

[2]) $C = 0$ ist ausgeschlossen, da sonst $S_2(a, b)$ trivial würde. Vergl. Anm. 1 zu S. 122 von Note I.

Es existiert zunächst, nach wie vor, $k_1 = 0$; dagegen ist für die Fälle der Multiplikation, die wir im folgenden betrachten ($C \geqq 2$), ein k_2 in dem zu Grunde gelegten Gebiet (der pos. ganzen Zahlen einschl. 0) nicht vorhanden. Daher gewinnt Grundgleichung **(3)** [1]), auf S_3 angewendet, folgende Fassung:

(3*) Aus $S_3(a, b) = S_3(a, b')$ folgt stets $b = b'$, wenn $a \neq 0$ ist.

Da wir, wie erwähnt, im folgenden nur Fälle $C \geqq 2$ untersuchen, so impliziert die Gleichung $C = 1$ einen Widerspruch. Verknüpfungsfälle, aus denen sich diese Gleichung ableiten läßt, sind sonach als **widerspruchsvoll** anzusehen.

Endlich führen wir hier noch einige Formeln an, die sich aus der Grundformel der allgemeinen Multiplikation [2]) ergeben, und im nachstehenden ohne weitere Ableitung benutzt werden:

$$C = S_2(1, 1); \qquad C \cdot a = S_2(1, a) = S_2(a, 1);$$
$$c \cdot S_2(a, b) = S_2(c \cdot a, b) = S_2(a, b \cdot c) = S_2(a \cdot b \cdot c, 1); \qquad S_2(a, 0) = 0\,.$$

§ 1. Werttripel. Reduktionsregeln.

Wir erwägen zunächst, was wir von der bisherigen Untersuchung über die legale [3]) Verknüpfung dritter Ordnung im Gebiete der ganzen pos. Zahlen einschl. 0 unter der veränderten Voraussetzung $C \geqq 2$ noch beibehalten können. Wir gehen auch hierbei davon aus, S_3 mit S_1 (Addition: $a + b$) und S_2 (allgem. Multiplikation: $C \cdot a \cdot b$; $C \neq 1$) durch Grundgleichung **(6)** [4]) unter den Bedingungen **(6)*a*** und **(6)*b*** [5]) vereinigen zu wollen.

Da sich hierbei die Werte von $\lambda\,(= 3)$ und $\mu\,(= 2$ oder $1)$ nicht geändert haben, so haben wir auch im nachstehenden für $\mu = 1$ und $\mu = 2$ je diese Werttripel zu diskutieren:

	$\mathbf{I}_\varrho$	$\mathbf{II}_\varrho$	$\mathbf{III}_\varrho$	$\mathbf{IV}_\varrho$	$\mathbf{V}_\varrho$	$\mathbf{VI}_\varrho$	$\mathbf{VII}_\varrho$	$\mathbf{VIII}_\varrho$	**IX**	**X**
φ	ϱ	ϱ	ϱ	ϱ	ϱ	ϱ	ϱ	ϱ	1	2
ψ	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3
χ	1	2	3	1	2	3	1	2	3	3

$\varrho = 1, 2, 3.$

Deren Kombination für $\mu = 1$ und $\mu = 2$ ergibt mithin $26 \cdot 26 = 676$ Möglichkeiten.

Von den in § 10 der Note I aufgestellten Reduktionsregeln bleibt Regel I [6]) nach wie vor in Geltung. Sie läßt in jeder Reihe nur die Tripel $\mathbf{I}_\varrho$ — $\mathbf{III}_\varrho$, $\mathbf{V}_\varrho$, $\mathbf{VI}_\varrho$, **IX** und **X**, also $17 \cdot 17 = 289$ Fälle übrig.

Dagegen wird Regel II [7]) für $\mu = 2$ unbrauchbar, da k_2 nicht existiert [8]).

---

[1]) Note I, S. 117.

[2]) $S_2(a, b) = C \cdot a \cdot b$; $C \neq 0$.

[3]) Gemäß den Grundgleichungen **(1) — (6)**.

[4]) Note I, S. 117.

[5]) Note I, S. 118.

[6]) *Zwei Fälle φ, ψ, χ und φ', χ', ψ' sind dann miteinander identisch, wenn $\varphi = \varphi'$, $\psi = \chi'$, $\chi = \psi'$ ist.*

[7]) *Bedeutet τ einen, τ' den anderen der beiden Werte ψ oder χ einer Entwicklung $S_3(a, S_\mu(b, c)) = S_\varphi(S_\psi(a. b), S_\chi(a, c))$; ($\mu = 1$ oder 2), so ist $S_\tau(a, k_\mu) = S_\tau(b, k_\mu)$, für jedes Paar a, b, für das $S_{\tau'}(a, b) \neq k_\nu$ ist ($0 < \nu < \varphi$).* (Vergl. hierzu Anm. [1]) und [2]) S. 123, Note I).

[8]) Die Anwendung auf $\mu = 1$ lautet dann: Ist $\varphi = 1$, so gibt es kein k_ν, von dem $S_\tau(a, b)$

Demnach läßt sie nur noch für

$$\left.\begin{array}{l}\mu = 1: \quad \mathbf{V_\varrho,\ VI_\varrho,\ IX,\ X.}\\ \mu = 2: \quad \mathbf{I_\varrho,\ II_\varrho,\ III_\varrho,\ V_\varrho,\ VI_\varrho,\ IX,\ X.}\end{array}\right\} \text{ d. i. } 8 \cdot 17 = 136 \text{ Fälle übrig.}$$

Regel III [1]) wiederum bleibt vollkommen erhalten. Da sie die Kombination gleichbezeichneter Tripel aus verschiedenen Reihen verbietet [2]), so fallen wiederum 8 Kombinationsmöglichkeiten weg, und es verbleiben 128 Restfälle.

Auch Regel IV [3]) bleibt als solche bestehen. Sie ist jedoch nur auf $\mu = 1$ anwendbar und hat kaum noch Bedeutung. Wir greifen auf sie als Regel nicht mehr zurück.

§ 2. Diskussion der Fälle V_ϱ, VI_ϱ, X der Reihe $\mu = 1$.

Wir betrachten nun zunächst diejenigen Werttripel der Reihe $\mu = 1$, die schon allein durch den Versuch, S_3 mit S_1 gemäß **(1)—(6)** zu verbinden, Widersprüche oder Trivialitäten ergeben.

$$\underline{\mathbf{V}_\varrho(\psi = \chi = 2).}$$

Hierbei ist

$$S_3(a, b) = S_3(a, S_1(b, 0)) = S_\varrho(S_2(a, b), S_2(a, 0)) = S_\varrho(S_2(a, b), 0).$$

Für $\varrho = 1$ wird dann

$$S_3(a, b) = S_2(a, b).$$

Wir erhalten also keine neue Verknüpfung.

Für $\varrho = 2$ ist

$$S_3(a, b) = 0; \quad \text{trivial.}$$

Für $\varrho = 3$ endlich ergibt sich, $S_2(a, b) = v$ gesetzt:

$$S_3(a, b) = S_3(v, 0) = S_3(v, S_1(0, 0)) = S_3(S_2(v, 0),\ S_2(v, 0)) = S_3(0, 0) = \text{constans};$$

also trivial.

Demnach scheidet $\mathbf{V_\varrho}\,(\mu = 1)$ aus.

---

verschieden sein müßte. Also ist Regel II auf alle a, b anwendbar. Hierbei ist, $\tau = 1$ gesetzt, für alle $a \neq b$: $S_1(a, 0) = S_1(b, 0)$, also $a = b$. Diese Tripel scheiden aus. Haben wir $\tau = 1$ fest, setzen aber $\varphi = 2$ oder 3, so muß $S_{\tau'}(a, b) \neq 0$, d. h. wenn $\tau' = 1$ oder 2 ist, $a \neq b$, a und $b \neq 0$ sein. Für alle diese a, b folgt wie oben der Widerspruch $a = b$. Ist endlich $\tau = 1$, $\varphi = 2$ oder 3, $\tau' = 3$, so muß $S_3(a, b) \neq 0$ sein. Alle Paare a, b, die dieser Ungleichung genügen, müssen auch erfüllen: $a = b$. Es kann also höchstens $S_3(a, a) \neq 0$ sein, dagegen muß $S_3(a, b) = 0$ gesetzt werden, sowie $a \neq b$ ist. Nun läßt sich $S_3(a, a)$ wie folgt entwickeln:

$$S_3(a, a) = S_3(a, S_1(a, 0)) = \left\{\begin{array}{l} S_2(S_1(a, a),\ S_3(a, 0)) = S_2(2a, 0)\\ S_3(S_1(a, a),\ S_3(a, 0)) = S_3(2a, 0)\end{array}\right\} = 0 \text{ für } a \neq 0.$$

Ist $a = 0$, so ist $k = S_3(0, 0) = S_3(0, S_1(0, 0)) = \left\{\begin{array}{l} S_2(0, k)\\ S_3(0, k)\end{array}\right\} = 0$. Mithin ist überhaupt $S_3(a, b) = 0$.

Also fallen für $\mu = 1$ alle Tripel fort, in denen ψ oder $\chi = 1$ ist.

[1]) *Ist $S_\mu(b, c) \neq S_\mu(b, c)$ für mindestens ein Paar b, c, so darf nicht zugleich $\varphi(\lambda, \mu) = \varphi(\lambda, \mu')$, $\psi(\lambda, \mu) = \psi(\lambda, \mu')$, $\chi(\lambda, \mu) = \chi(\lambda, \mu')$ sein.*

[2]) z. B. IX ($\mu = 1$) mit IX ($\mu = 2$).

[3]) *Existiert k_μ, so ist $S_\lambda(a, k_\mu) = S_\varphi(S_\psi(a, k_\mu),\ S_\chi(a, k_\mu))$.*

$$\underline{\mathbf{VI}_\varrho\,(\psi = 2,\ \chi = 3)}.$$

Hierbei entwickeln wir:

(1) $S_3(a, b) = S_3(a, S_1(0, b)) = S_\varrho(S_2(a, 0), S_3(a, b)) = S_\varrho(0, S_3(a, b))$,

(2) $S_3(a, b) = S_3(a, S_1(b, 0)) = S_\varrho(S_2(a, b), S_3(a, 0))$.

Wir prüfen zunächst den Fall

$$\varrho = 1.$$

Aus (2) ergibt sich dabei für jedes b, indem wir $a = 0$ setzen,

$$S_3(0, b) = S_3(0, 0) = C'.$$

Demnach wiederum aus (2):

$$S_3(a, b) = S_2(a, b) + C' = C \cdot a \cdot b + C'.$$

Nun ist nach Grundgleichung **(4)**

$$S_3(a, S_3(b, c)) = S_3(S_3(a, b), c),$$

also

$$C \cdot a\,(C \cdot b \cdot c + C') + C' = C \cdot (C \cdot a \cdot b + C') \cdot c + C'.$$

Mithin ist

$$C' \cdot a = C' \cdot c$$

oder, da diese Gleichung auch für $a \neq c$ gelten muß,

$$C' = 0,$$

d. h.

$$S_3(a, b) = S_2(a, b).$$

Demnach liefert $\mathbf{VI}_1$ gar keine neue Verknüpfung.

Wir gehen danach über zu

$$\varrho = 2.$$

Hier ist nach (1) sofort die Trivialität erkennbar:

$$S_3(a, b) = S_2(0, S_3(a, b)) = 0.$$

Endlich ist, wenn

$$\varrho = 3$$

genommen wird, und wenn wir $S_3(a, b)$ durch w bezeichnen, nach (1):

$$w = S_3(0, w),$$

und also nach (2)

$$w = S_3(0, S_3(0, 0)) = \text{constans};\quad \text{folglich trivial.}$$

Daraus ergibt sich, daß auch $\mathbf{VI}_\varrho$ nicht zu verwenden ist.

$$\underline{\mathbf{X}(\varphi = 2,\ \psi = \chi = 3)}.$$

Hiernach ist

$$\begin{aligned} w = S_3(a, b) &= S_3(a, S_1(b, 0)) \\ &= S_2(S_3(a, b), S_3(a, 0)) \\ &= S_2(w, S_3(a, 0)) = C \cdot w \cdot S_3(a, 0). \end{aligned}$$

Ist nun $S_3(a, 0) = 0$ zu setzen, so wird $S_3(a, b) = 0$, also trivial. Wird aber $S_3(a, 0) > 0$ angenommen, so ergibt sich für alle $C > 1$ ein Widerspruch.

Es war in diesen drei Fällen möglich, S_3 als trivial oder widerspruchsvoll oder gar als mit S_2 identisch nachzuweisen, ohne die Distributivformel für $\lambda = 3$ und $\mu = 2$ heranzuziehen. Das scheint bei der Diskussion von **IX** ($\mu = 1$) nicht mehr zuzutreffen. Vielmehr waren wir genötigt, zuzusehen, was geschieht, wenn neben der Gestaltung **IX** der Distribution für $\lambda = 3$ und $\mu = 1$ die zahlreichen Möglichkeiten treten, wie sie uns in den Tripeln $\mathbf{I}_\varrho$, $\mathbf{II}_\varrho$, $\mathbf{III}_\varrho$, $\mathbf{V}_\varrho$, $\mathbf{VI}_\varrho$, **IX** und **X** der Reihe $\mu = 2$ gegeben sind. Da allerdings durch Regel III die Kombination **(IX; IX)** verboten ist, wären hier noch 16 Fälle zu diskutieren.

§ 3. Diskussion von IX ($\mu = 1$).

Bei der Entwicklung nach **IX** ($\mu = 1$)[1]) gelten zunächst folgende Sätze.

(3) $$S_3(a, 0) = S_3(a, S_1(0, 0)) = S_1(S_3(a, 0), S_3(a, 0)) = 0.$$

Ferner für jedes $a \geqq 1$:

$$S_3(a, b) = S_3(S_1(a_1, 1), b) = S_1(S_3(a_1, b), S_3(1, b))$$

und hieraus durch vollständige Induktion unter Benutzung von (3):

(4) $$S_3(a, b) = a \cdot S_3(1, b) \qquad (a \geqq 1)^2).$$

Setzen wir hierin $b = 1$, so folgt

(5) $$S_3(a, 1) = a \cdot S_3(1, 1) \qquad (a \geqq 1)^3),$$

und endlich, indem wir dieses Ergebnis wieder auf (4) anwenden,

(6) $$S_3(a, b) = a \cdot b \cdot S_3(1, 1) \qquad (a \geqq 1,\ b \geqq 1)^4).$$

Daraus ergibt sich, daß für jedes Paar a, b, für das a und $b \neq 0$ sind, die Ungleichung gelten muß

(7) $$S_3(a, b) \neq 0.$$

Wäre nämlich auch nur für ein Paar $a' \neq 0$ und $b' \neq 0$

$$S_3(a', b') = 0,$$

so wäre $S_3(1, 1)$ und damit $S_3(a, b)$ überhaupt $= 0$, also trivial.

Wir betrachten nunmehr die Kombination

$$\underline{\mathbf{IX}\,(\mu = 1);\quad \mathbf{I}_\varrho\,(\mu = 2;\ \psi = \chi = 1).}$$

Hier setzen wir an:

$$S_3(C, 0) = S_3(S_2(1, 1), 0)) = S_\varrho(S_1(1, 0), S_1(1, 0)) = S_\varrho(1, 1).$$

Es müßte somit nach (3)

$$S_\varrho(1, 1) = 0$$

sein. Das würde für $\varrho = 1$ mit $2 = 0$, für $\varrho = 2$ mit $C = 0$ gleichbedeutend, also widerspruchsvoll sein. Setzen wir endlich $\varrho = 3$, so hätten wir im Gegensatz zu (7): $S_3(1, 1) = 0$. Diese Kombination scheidet also aus.

---

[1]) $\varphi = 1$, $\psi = \chi = 3$.
[2]) Für $a = 0$ geht (4) in (3) über.
[3]) Für $a = 0$ geht (5) in (3) über.
[4]) Für a oder $b = 0$ geht (6) in (3) über.

Wir gehen über zu

$$\underline{\mathbf{IX}\,(\mu = 1);\quad \mathbf{II}_\varrho(\mu = 2;\ \psi = 1,\ \chi = 2).}$$

Hier liefert die Entwicklung nach $\mathbf{II}_\varrho$:

(8) $$S_3(C, b) = S_3(S_2(1, 1), b) = S_\varrho(S_1(1, b), S_2(1, b)),$$

mithin für $b = 1$:

(9) $$S_3(C, 1) = S_\varrho(2, S_2(1, 1)) = S_\varrho(C, 2).$$

Da nun nach (4)

$$S_3(C, b) = b \cdot S_3(C, 1)$$

sein muß, so ergibt sich mit Hilfe von (8) und (9)

(10) $$S_\varrho(S_1(1, b), S_2(1, b)) = b \cdot S_\varrho(2, S_2(1, 1)).$$

Diese Gleichung (10) führt nun aber für $\varrho = 1$ und 2 zum Widerspruch; denn

$\underline{\varrho = 1}$ ergibt für $b = 0$:

$$1 = 0;$$

und

$\underline{\varrho = 2}$ liefert:

$$S_2(S_1(1, b), S_2(1, b)) = b \cdot S_2(2, S_2(1, 1)) = S_2(2, b \cdot S_2(1, 1)) = S_2(2, S_2(1, b)).$$

Ist nun $S_2(1, b) \neq 0$, also $b \neq 0$, so müßte für alle $b > 0$ gelten (nach Grundgleichung (3)):

$$S_1(1, b) = 2,$$

und das ist sicher falsch für alle $b > 1$.

$\underline{\varrho = 3}$ endlich ergibt nach (9):

$$S_3(C, 1) = S_3(C, 2),$$

folglich nach Grundgleichung (3*):

$$1 = 2.$$

Also ist diese Kombination als widerspruchsvoll erkannt.

Da somit auch ($\mathbf{IX}$; $\mathbf{II}_\varrho$) sich als unbrauchbar erwiesen hat, betrachten wir jetzt die Kombination

$$\underline{\mathbf{IX}(\mu = 1);\quad \mathbf{III}_\varrho(\mu = 2;\ \psi = 1,\ \chi = 3).}$$

Hierbei ist

(11) $$S_3(C, b) = S_3(S_2(1, 1), b) = S_\varrho(S_1(1, b), S_3(1, b)).$$

$\underline{\varrho = 1}$ liefert nun, $b = 0$ gesetzt, nach (3) und (11) den Widerspruch

$$0 = 1.$$

$\underline{\varrho = 2}$ ergibt folgendes:

Da nach (4)

$$S_3(C, b) = C \cdot S_3(1, b) = S_2(1, S_3(1, b))$$

ist, und (11) für $\varrho = 2$ die Form annimmt:

$$S_3(C, b) = S_2(S_1(1, b), S_3(1, b)),$$

so folgt hieraus nach Grundgleichung (3*) für alle $b \neq 0$[1]):

$$1 = S_1(1, b),$$

und das ist falsch für jedes $b > 1$.

Für $\varrho = 3$ erhalten wir aus (11), wenn wir $b = 1$ setzen:

$$S_3(C, 1) = S_3(2, S_3(1, 1)) = S_3(S_3(2, 1)\,1), = S_3(1, S_3(2, 1)) = S_3(S_1(0, 1)\; S_3(2, 1)).$$

Betrachten wir die rechte Seite dieser Gleichung als rechte Seite der Distributivformel $\mathbf{III}_3(\mu = 2)$, so lautet deren linke Seite: $S_3(S_2(0, 2), 1)$; und da nach (3) $S_3(0, a) = 0$ ist, haben wir

$$S_3(C, 1) = S_3(0, 1) = 0$$

im Widerspruch zu (7).

Es folgt jetzt die Kombination

$$\mathbf{IX}(\mu = 1);\ \mathbf{V}_\varrho(\mu = 2;\ \psi = \chi = 2).$$

Hierbei wird nun:

(12) $$S_3(C, b) = S_3(S_2(1, 1), b) = S_\varrho(S_2(1, b), S_2(1, b)) = S_\varrho(C \cdot b, C \cdot b).$$

$\varrho = 1$ gibt also folgendes Resultat, $b = 1$ genommen:

$$S_3(C, 1) = S_1(C, C) = 2 \cdot C,$$

und da nach (5)

$$S_3(C, 1) = C \cdot S_3(1, 1),$$

so folgt

$$S_3(1, 1) = 2.$$

Mithin ergibt sich aus (6):

$$S_3(a, b) = 2 \cdot a \cdot b = S_1(a \cdot b, a \cdot b),$$

oder, indem wir für a den Wert $2 \cdot C$ substituieren,

(13) $$S_3(2 \cdot C, b) = S_1(2 \cdot C \cdot b, 2 \cdot C \cdot b) = S_1(S_2(2, b), S_2(2, b)).$$

Andererseits ist, nach $\mathbf{V}_1$ entwickelt:

$$S_3(2 \cdot C, b) = S_3(S_2(2, 1), b) = S_1(S_2(2, b), S_2(1, b));$$

folglich muß stets

$$S_2(2, b) = S_2(1, b)$$

und für alle $b \neq 0$

$$1 = 2$$

sein. Wir erhalten also einen Widerspruch.

Setzen wir nun

$\varrho = 2$, so wird nach (12):

(14) $$S_3(C, b) = S_2(S_2(1, b), S_2(1, b)).$$

Andererseits ist nach (4):

$$S_3(C, b) = b \cdot S_3(C, 1) = b \cdot S_3(S_2(1, 1), 1);$$

dieses nun nach $\mathbf{V}_2$ entwickelt, liefert

---

[1]) da $S_3(1, b) \neq 0$ sein muß für $b \neq 0$ (nach (7)).

$$b \cdot S_3(S_2(1,1),1) = b \cdot S_2(S_2(1,1), S_2(1,1))$$
$$= S_2(b \cdot S_2(1,1), S_2(1,1)) = S_2(S_2(1,b), S_2(1,1)).$$

Nun ergibt das, mit (14) verglichen, für alle $b \neq 0$:

$$S_2(1,1) = S_2(1,b) \quad \text{oder} \quad 1 = b.$$

Wir haben daher wieder für alle $b > 1$ den Widerspruch.

$\varrho = 3$ endlich läßt aus (12) schließen, $b = 1$ genommen:

$$S_3(1,C) = S_3(C,C), \quad \text{also stets den Widerspruch} \quad C = 1.$$

Bei der Kombination

$$\mathbf{IX}(\mu = 1); \quad \mathbf{VI}_\varrho(\mu = 2; \ \psi = 2, \ \chi = 3)$$

setzen wir wiederum an:

(15) $$S_3(C,1) = S_3(S_2(1,1),1) = S_\varrho(S_2(1,1), S_3(1,1)).$$

Nehmen wir hierin zunächst

$\varrho = 1$, so folgt

(16) $$S_3(C,1) = S_1(S_2(1,1), S_3(1,1)).$$

Setzen wir nun $S_3(1,1) = C'$, so ist nach (16):

$$S_3(C,1) = S_1(C,C').$$

Andererseits ist nach (5):

$$S_3(C,1) = C \cdot S_3(1,1) = C \cdot C'.$$

Folglich ist hier

$$C + C' = C \cdot C'.$$

Das ist wegen $C \neq 0$ nur dann möglich, wenn

$$C = C' = 2$$

ist. Für alle $C \neq 2$ ergibt sich sonach ein Widerspruch. Aber auch $C = C' = 2$ kommt nicht in Frage, da dann wegen (6)

$$S_3(a,b) = a \cdot b \cdot S_3(1,1) = a \cdot b \cdot C' = a \cdot b \cdot C = S_2(a,b)$$

gar keine neue Verknüpfung ist.

Nehmen wir nun an, daß in (15)

$\varrho = 2$ gesetzt werde, so folgt:

$$S_3(C,1) = S_2(C, S_3(1,1)).$$

Andererseits ist nach (5)

$$S_3(C,1) = C \cdot S_3(1,1) = S_2(1, S_3(1,1)),$$

daher, weil nach (7) $S_3(1,1) \neq 0$ sein muß:

$$1 = C.$$

Und das sollte ja ausgeschlossen sein.

$\varrho = 3$ endlich liefert nach (15):

$$S_3(C,1) = S_3(C, S_3(1,1)),$$

d. h.

$$S_3(1,1) = 1, \quad \text{oder nach (5):} \quad S_3(C,1) = C.$$

Also ist

$$S_3(C, C) = S_3(S_2(1, 1), C) = S_3(S_2(1, C), S_3(1, C)) = S_3(S_2(1, C), C).$$

Mithin müßte auch hier

$$S_2(1, 1) = S_2(1, C)$$

sein, daher C den verbotenen Wert 1 annehmen.

Jetzt erübrigt nur noch die Betrachtung von

$$\mathbf{IX}(\mu = 1); \quad \mathbf{X}(\mu = 2;\ \varphi = 2,\ \psi = \chi = 3).$$

Hierbei ist

$$S_3(C, C) = S_3(S_2(1, 1), C) = S_2(S_3(1, C), S_3(1, C)).$$

Andererseits nach (4):

$$S_3(C, C) = C \cdot S_3(1, C) = S_2(1, S_3(1, C)).$$

Folglich ist

$$S_3(1, C) = 1.$$

Da nun nach (5)

$$S_3(C, 1) = C \cdot S_3(1, 1)$$

ist, so müßte

$$1 = C \cdot S_3(1, 1)$$

sein, und das ist nur für $C = 1 = S_3(1, 1)$ möglich, führt sonach zum Widerspruch.

§ 4. Ergebnis.

Damit ist nachgewiesen, daß von allen Möglichkeiten, eine Verknüpfung dritter Ordnung im Gebiete der positiven ganzen Zahlen einschl. Null streng analog den Grundgleichungen der Addition und Multiplikation aufzubauen, keine in Frage kommt. Mit anderen Worten:

Eine legal auf Grund der Gesetze **(1)—(6)** *aufgebaute Arithmetik, deren Verknüpfung erster Ordnung die gewöhnliche Addition ist, kommt im Gebiete der positiven ganzen Zahlen (einschl. der Null) nicht über die allgemeine Multiplikation hinaus.*

Zusatz.

Dieses Resultat scheint sich zu ändern, wenn für die Verknüpfungen S_λ einige Grundgleichungen wegfallen. Es läßt sich nämlich folgendes zeigen:

Wir setzen, wie bisher $S_1(a, b) = a + b$. Für $\lambda > 1$ soll dann nur die Giltigkeit der Grundgleichungen **(1)—(3)** und **(6), (6)a, (6)b** gefordert werden, d. i. Existenz, Eindeutigkeit, Faktorgleichheit und funktional bestimmte Distribution. Dann muß bei S_2 schon das Distributivschema $\mathbf{I}_1$ zugelassen werden, und zwar in doppelter Gestalt:

$$S_2(a, S_1(b, c)) = S_1(S_1(a, b), S_1(a, c)) = 2 \cdot a + (b + c)$$

und

$$S_2(S_1(a, b), c) = S_1(S_1(a, c), S_1(b, c)) = (a + b) + 2c.$$

Im betrachteten Grundbereich ist dann

entweder $S'_2(a, b) = 2a + b$ oder $S'_2(a, b) = a + 2b$

möglich.

Beide Verknüpfungen lassen sich als widerspruchsfrei dartun; die Schemata $\mathbf{I_2}$, $\mathbf{II_\sigma}$, $\mathbf{III_\sigma}$ bleiben widerspruchsvoll. — $\mathbf{I_1}$ ergibt ebenfalls einen Widerspruch, sowie **(4)** oder **(5)**, also Kommutativität oder Assoziation auch nur im geringsten Umfange angenommen werden.

Weitere Resultate stehen noch nicht mit vollendeter Sicherheit fest.

Ein neuer Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes.

Von *L. Rédei* in Budapest.

Den nachfolgenden Beweis des quadratischen Reziprozitätssatzes möchte ich veröffentlichen, da dieser sich meines Wissens von den bekannten prinzipiell unterscheidet.

Wir könnten alle Paare (p, q) der ungeraden Primzahlen gleichzeitig behandeln, doch wollen wir den Fall $p \equiv q \equiv 3$, (mod. 4) vorausschicken, da es besonders interessant ist und auch den Beweis des allgemeinen Falles beleuchtet.

§ 1.

Es seien p und q verschiedene ungerade Primzahlen und $p \equiv q \equiv 3$, (mod. 4). Es sei $\left(\frac{a}{p}\right)$ das Symbol von *Legendre* und $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$, wenn $a \equiv 0$, (mod. p). Es bedeute n_{pq} die Anzahl der quadratischen Reste mod. pq in der ersten Hälfte des kleinsten nichtnegativen Restsystems von pq. Dann hat man

$$(1) \qquad n_{pq} = \sum_{i=1}^{(pq)'}{}' \frac{1 + \left(\frac{i}{p}\right)}{2} \cdot \frac{1 + \left(\frac{i}{q}\right)}{2},$$

wo $(pq)'$ anstatt $\frac{pq-1}{2}$ gesetzt ist und der Strich neben Σ die Auslassung der zu pq nicht relativ primen Werte bedeutet. Für die in der Rede stehenden Summationswerte hat man $\Sigma 1 = \frac{\varphi(pq)}{2} = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$ und $\Sigma\left(\frac{i}{p}\right)\left(\frac{i}{q}\right) = 0$, da $\left(\frac{pq-i}{p}\right)\left(\frac{pq-i}{q}\right) = \left(\frac{i}{p}\right)\left(\frac{i}{q}\right)$, es ist also

$$(2) \qquad n_{pq} = \frac{(p-1)(q-1)}{8} + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{(pq)'}{}'\left(\frac{i}{p}\right) + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{(pq)'}{}'\left(\frac{i}{q}\right).$$

Man sieht leicht ein, daß

$$(A) \qquad \sum_{i=1}^{(pq)'}{}'\left(\frac{i}{p}\right) = \sum_{i=1}^{(pq)'}\left(\frac{i}{p}\right) - \Sigma\left(\frac{i}{p}\right) - \Sigma\left(\frac{i}{p}\right).$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i=p, 2p, \ldots, \frac{q-1}{2}p \qquad i=q, 2q, \ldots, \frac{p-1}{2}q$$

Wir können im ersten Glied der rechten Seite die obere Grenze durch $\frac{p-1}{2}$ ersetzen, da $(pq)' \equiv \frac{p-1}{2}$, (mod. p) und man hat ja $\sum_{i=a+1}^{a+p}\left(\frac{i}{p}\right) = 0$; das zweite

Glied ist gleich Null; das dritte ist offenbar das $\left(\frac{q}{p}\right)$-fache des ersten. Man hat also aus (2)

$$n_{pq} = \frac{(p-1)(q-1)}{8} + \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)\right)\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{i}{p}\right) + \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)\right)\sum_{i=1}^{\frac{q-1}{2}}\left(\frac{i}{q}\right)^{1)},$$

wo man das dritte Glied entsprechend umgeformt hatte.

Die hier auftretenden beiden Summen sind ungerade Zahlen, da sowohl $\frac{p-1}{2}$, wie $\frac{q-1}{2}$ ungerade Zahlen sind. Mit n_{pq} ist also auch

$$(3) \qquad \frac{(p-1)(q-1)}{8} + \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)}{4} + \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)}{4}$$

eine ganze Zahl und damit ist der Satz für den jetzt behandelten Fall bewiesen.

(Wenn nämlich (3) eine ganze Zahl ist, dann ist auch

$$\frac{(p-1)(q-1)}{8} - \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)}{4} + \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2} - \frac{\left(\frac{p}{q}\right)-\left(\frac{q}{p}\right)}{2}\right)$$

eine ganze Zahl, also $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2} \equiv \frac{\left(\frac{p}{q}\right)-\left(\frac{q}{p}\right)}{2}$, (mod. 2). Quadriert man die rechte Seite, (es ist $a^2 \equiv a$, (mod. 2)) formt man die linke Seite nach $x \equiv \frac{1-(-1)^x}{2}$, (mod. 2) um und multipliziert man mit 2, so bekommt man

$$1-(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \equiv 1-\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right), \text{ (mod. 4), also } (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} = \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right);$$

welche schon die gewöhnliche Form des quadratischen Reziprozitätssatzes ist).

§ 2.

Es seien p, q beliebige verschiedene ungerade Primzahlen.

Es sei $\frac{p-1}{2^e}$ eine ungerade Zahl, g eine primitive Wurzel der Kongruenz $x^{p-1} \equiv 1$, (mod. p) und α eine primitive Einheitswurzel 2^e-ten Grades. Wir definieren das Symbol $\left[\frac{a}{p}\right]$ für jede rationale ganze Zahl a folgendermaßen:

$$\left[\frac{g^r}{p}\right] = \alpha^r, \quad \left[\frac{0}{p}\right] = 0 \quad \text{und} \quad \left[\frac{a}{p}\right] = \left[\frac{b}{p}\right] \quad \text{für} \quad a \equiv b, \text{ (mod. } p).$$

Dann ist

$$\left[\frac{ab}{p}\right] = \left[\frac{a}{p}\right]\left[\frac{b}{p}\right], \left[\frac{-1}{p}\right] = \left[\frac{g^{\frac{p-1}{2}}}{p}\right] = -1 \text{ und } \left[\frac{a}{p}\right]^{2^{e-1}} = \alpha^{2^{e-1}\,\text{ind. }a} = (-1)^{\text{ind. }a} = \left(\frac{a}{p}\right).$$

---

[1]) Auf diese Formel, bzw. auf ihre Verallgemeinerung gedenke ich an anderer Stelle zurückzukommen.

Wie e, g, α zu p gehören, so sollen f, h, β zu q gehören.

Das Zahlenpaar $\left(\left[\frac{a}{p}\right], \left[\frac{a}{q}\right]\right)$ werden wir den Charakter von a nennen.

Bedeutet $n_{p,q}^{r,s}$ die Anzahl der Zahlen mit dem Charakter $(\alpha^{-r}, \beta^{-s})$ in der ersten Hälfte des kleinsten nicht negativen Restsystems von pq, so sieht man leicht ein, daß

$$(4)\qquad \begin{aligned} n_{p,q}^{r,s} &= \sum_{i=1}^{(pq)'}{}' \left(\frac{1}{2^e} \sum_{\mu=0}^{2^e-1} \left(\alpha^r \left[\frac{i}{p}\right]\right)^\mu\right)\left(\frac{1}{2^f} \sum_{\nu=0}^{2^f-1} \left(\beta^s \left[\frac{i}{q}\right]\right)^\nu\right) \\ &= \frac{1}{2^{e+f}} \sum_{i=1}^{(pq)'}{}' \sum_{\mu=0}^{2^e-1} \sum_{\nu=0}^{2^f-1} \alpha^{r\mu}\beta^{s\nu} \left[\frac{i}{p}\right]^\mu \left[\frac{i}{q}\right]^\nu. \end{aligned}$$

Abgesehen vom Falle $\mu = \nu = 0$ gibt es immer eine rat. ganze Zahl c, die zu pq rel. prim ist und für welche $\left[\frac{c}{p}\right]^\mu \left[\frac{c}{q}\right]^\nu = \gamma \neq 1$ (z. B. wenn $\mu \neq 0$, so wähle man $c \equiv g$, (mod. p), $c \equiv 1$, (mod. q)) und also in diesem Falle

$$(B)\qquad \sigma = \sum_{i=1}^{pq-1}{}' \left[\frac{i}{p}\right]^\mu \left[\frac{i}{q}\right]^\nu = 0,$$

denn die Summe ändert sich nicht, wenn man ci an Stelle von i setzt, während sie sich mit γ multipliziert. Ferner hat man in diesem Falle

$$0 = \sigma = \sum_{i=1}^{(pq)'}{}' \left[\frac{i}{p}\right]^\mu \left[\frac{i}{q}\right]^\nu + \sum_{i=1}^{(pq)'}{}' \left[\frac{pq-i}{p}\right]^\mu \left[\frac{pq-i}{q}\right]^\nu = (1 + (-1)^{\mu+\nu}) \sum_{i=1}^{(pq)'}{}' \left[\frac{i}{p}\right]^\mu \left[\frac{i}{q}\right]^\nu.$$

Im Ausdrucke (4) verschwinden also die Glieder, die zu einem Indizespaare (μ, ν) gehören, bei dem $\mu + \nu$ gerade und von Null verschieden ist. Folglich

$$n_{p,q}^{r,s} = \frac{\varphi(pq)}{2^{e+f+1}} + \frac{1}{2^{e+f}} \sum_{i=1}^{(pq)'}{}' \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu+\nu \text{ ungerade}}}^{2^e-1} \sum_{\nu=0}^{2^f-1} \alpha^{r\mu}\beta^{s\nu} \left[\frac{i}{p}\right]^\mu \left[\frac{i}{q}\right]^\nu.$$

Nun summiere man hier nach r von 0 bis $2^{e-1}-1$ und nach s von 0 bis $2^{f-1}-1$, dann verschwinden wegen der Summation nach r bezw. nach s die Glieder, die zu einem solchen Indizespaar (μ, ν) gehören, bei dem entweder μ gerade und $\neq 0$, oder ν gerade und $\neq 0$; es können also nur Glieder mit den Indizespaaren $(0, 1)$, $(0, 3), \ldots$; $(1, 0), (3, 0), \ldots$ verbleiben, also

$$n_{pq} = \sum_{r,s} n_{p,q}^{r,s} = \frac{\varphi(pq)}{8} + \frac{1}{2^{e+f}} \sum_{r=0}^{2^{e-1}-1} \sum_{s=0}^{2^{f-1}-1} \sum_{i=1}^{(pq)'}{}' \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \text{ ungerade}}}^{2^e-1} \alpha^{r\mu} \left[\frac{i}{p}\right]^\mu + (\cdots),$$

wo $(\cdots)$ den Ausdruck bedeutet, den man aus dem vorangehenden Gliede erhält, wenn man in ihm p und die zu p gehörenden Zahlen, bzw. mit q und mit den zu q gehörenden Zahlen vertauscht.

Vollführt man die Summation nach s und formt die Summe nach i derart um, wie im vorigen Par. bei (A), $(n \cdot b \cdot \sum_{i=a+1}^{a+p}{}' \left[\frac{i}{p}\right]^\mu = 0$ ergibt sich ähnlich, wie bei (B)), so bekommt man

$$n_{pq} = \frac{\varphi(p, q)}{8} + \frac{1}{2^{e+1}} \sum_{r=0}^{2^{e-1}-1} \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}{}' \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \text{ ungerade}}}^{2^e-1} \left(1 - \left[\frac{q}{p}\right]^\mu\right) \alpha^{r\mu} \left[\frac{i}{p}\right]^\mu + (\cdots).$$

Man vollführe die Summation nach r, (mit Rücksicht auf $a^{2^{e-1}} = -1$), und setze $0 < x = \text{ind. } q \leqq p-1$, also $\left[\frac{q}{p}\right] = a^x$, so bekommt man

$$(5) \qquad n_{pq} = \frac{\varphi(pq)}{8} + \frac{1}{2^e} \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \text{ ungerade}}}^{2^e-1} \frac{1-a^{\mu x}}{1-a^{\mu}} \left[\frac{i}{p}\right]^{\mu} + (\cdots).$$

Es bedeute a_m bzw. a'_m die Anzahl derjenigen Zahlen a in der Folge $1, \ldots, \frac{p-1}{2}$ bzw. $\frac{p+1}{2}, \ldots, p-1$, für welche $\left[\frac{a}{p}\right] = a^m$[1]) ist, so ist

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{i}{p}\right]^{\mu} = \sum_{m=0}^{2^e-1} a_m a^{m\mu}.$$

Setzt man dies in (5) ein und führt man dort die Division aus, so bekommt man

$$n_{pq} = \frac{\varphi(pq)}{8} + \frac{1}{2^e} \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \text{ ungerade}}}^{2^e-1} \sum_{r=0}^{x-1} \sum_{m=0}^{2^e-1} a_m a^{(r+m)\mu} + (\cdots).$$

Hier ist das Glied mit dem Indizespaar (r, m) gleich Null, abgesehen vom Falle, wo 2^{e-1} in $r+m$ aufgeht; diese letzte Bedingung ordnet zu einem jeden r zwei $-m_r, m_r + 2^{e-1}$ — Werte von m zu, und so bekommen wir nach der Summation nach μ

$$n_{pq} = \frac{\varphi(pq)}{8} + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{x-1} (\varepsilon a_{m_r} + \eta a_{m_r+2^{e-1}}) + (\cdots),$$

wo $\varepsilon, \eta = \pm 1$. Da n_{pq} eine ganze Zahl ist, so steht auf der rechten Seite eine ganze Zahl auch dann, wenn man $\varepsilon = \eta = 1$ setzt. Der Summand ist dann nach der Note ersichtlich eine ungerade Zahl, also

$$\frac{\varphi(pq)}{8} + \frac{x}{2} + (\cdots) \text{ ganz.}$$

Da $x \equiv \frac{1-(-1)^x}{2} \equiv \frac{1-(-1)^{\text{ind. } q}}{2} \equiv \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)}{2}$, (mod. 2), so ist

$$\frac{(p-1)(q-1)}{8} + \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)}{4} + \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)}{4}$$

ganz, woraus der Satz, wie am Ende des vorigen Paragraphen, folgt.

---

[1]) Offenbar ist $a_m + a'_m$ gleich der Anzahl der Glieder in der Folge $g^m, g^{m+2^e}, \ldots, g^{m+\left(\frac{p-1}{2^e}-1\right)2^e}$, d. h. $a_m + a'_m = \frac{p-1}{2^e}$; anderseits ist $a'_m = a_{m+2^e-1}$, da $\left[\frac{p-i}{p}\right] = \left[\frac{-1}{p}\right]\left[\frac{i}{p}\right] = a^{2^e-1}\left[\frac{i}{p}\right]$, also $a_m + a_{m+2^e-1} = \frac{p-1}{2^e}$ eine ungerade Zahl.

Über Potenzreihen von Matrizen.

Von *Kurt Hensel* in Marburg a. L.

Unter den Anwendungen des System- oder Matrizenkalküls, die in den letzten Jahrzehnten gemacht worden sind, bietet die Funktionentheorie oder die Infinitesimalrechnung der Matrizen, wie sie von *Volterra* und *Schlesinger* begründet und besonders von letzterem mit so großem Erfolge auf die linearen Differentialgleichungen angewendet worden ist, ein besonders großes Interesse.

Die Grundlage für diese Untersuchung bildet die Betrachtung eines Funktionenelementes oder einer beliebigen Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots,$$

deren Argument ein variables System n-ter Ordnung

$$T = (t_{ik})$$

ist, während seine Koeffizienten a_i gegebene Skalarsysteme derselben Ordnung bedeuten.

Die Hauptfrage ist hier, für welche Werte von T $\mathfrak{P}(T)$ konvergiert, in welcher Weise also die Variabilität von $T = (t_{ik})$ durch die Forderung der Konvergenz beschränkt wird. Diese Frage hat nun eine sehr schöne und einfache, jedoch nicht vollständige Beantwortung durch einen Satz von *E. Weyr* gefunden (Bulletin des sciences mathématiques sér. 2. Bd. XI); sein Beweis ist aber ziemlich kompliziert und gibt, wie mir scheint, nicht die volle Einsicht in die Natur dieser einfachen Frage.

Ich möchte daher in diesen Zeilen eine neue und vollständige Beantwortung dieser Frage geben, die aus den Resultaten meiner Abhandlung „Über Körper von Matrizen“ (ds. Journal Bd. 127, S. 116 flgd.) unmittelbar hervorgeht.

Nennt man zwei Systeme T und $T' = P^{-1}TP$ äquivalent, wenn jedes in das andere durch kontragrediente Transformation mit einem beliebigen Multiplikator P hervorgeht, so folgt aus der bekannten und auch leicht direkt erweisbaren Beziehung:

$$\mathfrak{P}(T') = \mathfrak{P}(P^{-1}TP) = P^{-1}\mathfrak{P}(T)P;$$

daß $\mathfrak{P}(T)$ dann und nur dann konvergiert, wenn dieselbe Potenzreihe für irgendein zu T äquivalentes System T' konvergent ist.

Man kann nun von vornherein T durch ein so einfaches äquivalentes T' ersetzen, daß sich für dieses die hier aufgeworfene Frage ganz trivial beantworten läßt.

Jedes System n-ter Ordnung T genügt bekanntlich einer eindeutig bestimmten Gleichung niedrigsten Grades der sog. Hauptgleichung mit skalaren Koeffizienten:

$$(1.) \qquad \psi(t) = t^\nu + b_1 t^{\nu-1} + \cdots + b_\nu = (t-\tau_1)^{\nu_1} \ldots (t-\tau_r)^{\nu_r},$$

deren Grad $\nu \leqq n$ und deren linke Seite, was hier nur beiläufig erwähnt werde, ein Teiler der zu T gehörigen Determinante $|t-T|$ ist. Äquivalente Systeme genügen offenbar derselben Hauptgleichung.

Der erste Satz, welchen ich in meiner Arbeit mit den einfachsten Mitteln bewiesen habe, ist nun dieser:

Jedes System T ist äquivalent einem Systeme T' von der Form:

$$(2.) \qquad T' = \begin{pmatrix} T'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T'_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & 0 & \cdots & T'_{rr} \end{pmatrix},$$

in welchem jedes der in der Diagonale stehenden T'_{ii} ein quadratisches System einer Ordnung n_i ist, dessen Hauptgleichung:

$$\psi_i(t) = (t-\tau_i)^{\nu_i}$$

nur aus je einer der r Linearfaktorpotenzen von $\psi(t)$ besteht.

Da nun für dieses äquivalente System $T' = (T'_{ii})$ offenbar:

$$(2a.) \qquad \mathfrak{P}(T') = \begin{pmatrix} \mathfrak{P}(T'_{11}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathfrak{P}(T'_{22}) & \cdots & 0 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{P}(T'_{rr}) \end{pmatrix}$$

ist, da also $\mathfrak{P}(T')$ und somit auch $\mathfrak{P}(T)$ dann und nur dann konvergiert, wenn dasselbe für jedes der r Partialsysteme $\mathfrak{P}(T'_{ii})$ der Fall ist, so braucht die Frage der Konvergenz nur für irgend eins derselben untersucht zu werden.

Wir können und wollen also von vornherein annehmen, daß schon für das ursprüngliche System n-ter Ordnung T die Hauptgleichung:

$$(3.) \qquad \psi(t) = (t-\tau)^\nu = 0$$

die Potenz eines einzigen Linearfaktors ist. Dann ist also $(T-\tau)^\nu = 0$ die niedrigste Potenz von $T-\tau$, welche Null ist und die Rangzahlen der ν ersten Potenzen von $T-\tau$

$$[(T-\tau)^0] = n, \quad [T-\tau], \quad [(T-\tau)^2], \ldots [(T-\tau)^{\nu-1}]$$

bilden eine nicht zunehmende Reihe von positiven ganzen Zahlen. Dasselbe gilt, wie hier nur erwähnt zu werden braucht (vgl. a. a. O. S.144 (4.)), von ihren ν Differenzen $e_1 \geqq e_2 \geqq \cdots \geqq e_\nu$, wo allgemein:

$$(4.) \qquad e_i = [(T-\tau)^{i-1}] - [(T-\tau)^i], \qquad (i = 1, 2, \ldots \nu)$$

gesetzt ist.

Ich teile nun das System n-ter Ordnung T dadurch in ν^2 Partialsysteme:

$$(5.) \qquad T = (T_{ik}), \qquad (i, k = 1, 2, \ldots \nu),$$

daß ich der Reihe nach je $e_1, e_2, \ldots e_\nu$ Zeilen zu je einem ersten, zweiten, ... ν-ten Horizontalabschnitte zusammenfasse, und ebenso mit den Kolonnen verfahre, so daß also allgemein T_{ik} aus e_i Zeilen und e_k Kolonnen besteht. Dann ist das System $T - \tau$, wie a. a. O. S. 147 (6.) gezeigt wird, äquivalent einem reduzierten Systeme:

$$(6.) \qquad T' - \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

welches nur in der ersten Parallelreihe rechts oberhalb der Diagonalen von Null verschiedene Elemente enthält, und zwar jedesmal die den Partialsystemen $T_{12}, T_{23}, \ldots$ entsprechenden Einheitssysteme. Dann folgt von selber, daß $(T' - \tau)^2, (T' - \tau)^3, \ldots (T' - \tau)^{\nu-1}$ der Reihe nach nur in der zweiten, dritten, ... $(\nu - 1)$-ten oberen Parallelreihe die entsprechenden Einheitssysteme und sonst lauter Nullen enthält.

Wir nehmen nun an, daß bereits $T - \tau$ für das gegebene System T diese reduzierte Form hat. Dann ergibt sich für die zu untersuchende Potenzreihe $\mathfrak{P}(T)$ die Gleichung

$$(7.) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{P}(T) &= \mathfrak{P}(\tau + (T - \tau)) \\ &= a_0 + a_1(\tau + (T - \tau)) + a_2(\tau + (T - \tau))^2 + \cdots, \end{aligned}$$

und da das Skalarsystem τ mit jedem anderen vertauschbar ist, da ferner $(T - \tau)^\nu$ und alle höheren Potenzen von $T - \tau$ Null sind, und da endlich die ν ersten Potenzen von $T - \tau$, welche nur mit Skalarsystemen multipliziert sind, lauter an verschiedenen Stellen stehende Elemente haben, welche sich nicht aufheben können, so erhält man für $\mathfrak{P}(T)$ die folgende einfache Darstellung:

$$(7\,a.) \quad \mathfrak{P}(T) = \mathfrak{P}(\tau) + \mathfrak{P}'(\tau)(T - \tau) + \frac{\mathfrak{P}''(\tau)}{2!}(T - \tau)^2 + \cdots + \frac{\mathfrak{P}^{(\nu-1)}(\tau)}{(\nu - 1)!}(T - \tau)^{\nu-1}.$$

Dann und nur dann konvergiert also $\mathfrak{P}(T)$, wenn die ν ersten Ableitungen

$$\mathfrak{P}(t), \mathfrak{P}'(t), \ldots \mathfrak{P}^{(\nu-1)}(t)$$

für die ν-fache Wurzel $t = \tau$ der Hauptgleichung für T konvergieren. Also divergiert $\mathfrak{P}(T)$, wenn τ außerhalb des Konvergenzkreises $\mathfrak{K}_\varrho$ von $\mathfrak{P}(t)$ liegt, und $\mathfrak{P}(T)$ konvergiert, wenn sich τ im Inneren desselben befindet, weil dann nicht bloß $\mathfrak{P}(t)$, sondern auch alle seine Ableitungen für $t = \tau$ konvergieren. Liegt dagegen τ auf der Peripherie des Konvergenzkreises, so besteht dann und nur dann Konvergenz für $t = T$, wenn die ersten ν Ableitungen von $\mathfrak{P}(t)$ für diese ν-fache Wurzel τ der Hauptgleichung konvergent sind. Konvergiert aber in diesem Falle nur die letzte von ihnen $\mathfrak{P}^{(\nu-1)}(\tau)$, so gilt nach einem bekannten Satze (vgl. z. B. *Pringsheim*, Funktionenlehre S. 321 unten) dasselbe für alle früheren Ableitungen. Diese eine Bedingung ist also in diesem Falle notwendig und hinreichend für die Konvergenz von $\mathfrak{P}(T)$.

Da im allgemeinsten Falle, daß die Hauptgleichung für T die Form (6.) hat:

$$\psi(t) = \Pi(t - \bar{\tau})^{\bar{\nu}} = 0,$$

für jedes der r dort sich ergebenden Partialsysteme T'_{ii} in (2.) das Gleiche gilt, so ergibt sich endlich der ganz allgemeine Satz:

Eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(t)$ divergiert für $t = T$, wenn auch nur eine der r-Wurzeln der Hauptgleichung $\psi(t) = 0$ für T außerhalb des Konvergenzkreises $\mathfrak{K}_\varrho$ von $\mathfrak{P}(t)$ liegt, sie konvergiert stets, wenn sich alle r-Wurzeln im Inneren von $\mathfrak{K}_\varrho$ befinden. Für jedes $\bar{\tau}$ endlich, welches auf der Peripherie von $\mathfrak{K}_\varrho$ liegt, muß $\mathfrak{P}^{(\bar{\nu}-1)}(\tau)$ konvergent sein, wenn $\bar{\tau}$ eine $\bar{\nu}$-fache Wurzel der Hauptgleichung von T ist.

Nur den ersten Teil dieses allgemeinen Satzes hat *E. Weyr* in der oben erwähnten Abhandlung aufgestellt und bewiesen.

Offenbar kann man den Satz auch in der folgenden Form aussprechen:
Die Potenzreihe $\mathfrak{P}(t)$ konvergiert dann und nur dann für $t = T$, wenn für jede Wurzel $\bar{\tau}$ der charakteristischen Gleichung für T, $\mathfrak{P}^{(\bar{\nu}-1)}(\bar{\tau})$ konvergiert, wenn $\bar{\tau}$ eine $\bar{\nu}$-fache Wurzel derselben ist.

Alle ganzen transzendenten Funktionen wie e^t, $\sin t$, $\cos t$, ... deren Funktionselemente $\mathfrak{P}(t)$ in der ganzen komplexen Zahlenebene konvergieren, sind also durch dieselben auch für *jedes* Argument $T = (t_{ik})$ definiert. Da aber z. B.:

$$\lg(1+t) = \mathfrak{P}(t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots$$

für jedes t in und auf dem Einheitskreise mit Ausnahme von $t = -1$ konvergiert, sonst aber divergiert, so konvergiert auch die durch die Reihe

$$\mathfrak{P}(T) = T - \frac{T^2}{2} + \frac{T^3}{3} - \cdots$$

definierte Funktion $\lg(1+T)$ für alle und nur die Systeme T, deren Wurzeln $\bar{\tau}$ in oder auf dem Einheitskreise liegen, aber $\neq -1$ sind. Da endlich die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(t) = \sum_1^\infty \frac{t^\nu}{\nu^2}$$

den Einheitskreis als Konvergenzbereich hat, und auf seiner Peripherie absolut konvergiert, und da

$$\mathfrak{P}'(t) = \sum_1^\infty \frac{t^{\nu-1}}{\nu}$$

auf jenem Kreise nur für $t = 1$ divergiert, während

$$\mathfrak{P}''(t) = \Sigma \frac{\nu - 1}{\nu} t^{\nu-2}$$

auf demselben Kreise durchweg divergiert, so konvergiert $\mathfrak{P}(T)$ dann und nur dann, wenn für alle Wurzeln $\bar{\tau}$ der Hauptgleichung von T $|\bar{\tau}| \leqq 1$ ist, mit der Beschränkung, daß $\bar{\tau} = 1$ höchstens eine einfache, alle übrigen $\bar{\tau}$ mit $|\bar{\tau}| = 1$ höchstens Doppelwurzeln derselben sein dürfen.

Einige periodische Kettenbruchentwicklungen.

Von *A. Arwin* in Malmö (Schweden).

Bekanntlich wird die Entwicklung einer quadratischen Irrationalität über $K(1)$, dem Körper der rationalen Zahlen, in einen regulären Kettenbruch periodisch; auch die quadratischen Irrationalitäten über $K(i)$ $(i^2 = -1)$ sind, wie es besonders die Herren *J. Hurwitz* und *G. Mathews*[1]) dargelegt haben, periodisch. Ich werde hier dasselbe Ziel verfolgen, will aber die Periodizität in einer sozusagen mehr algebraischen als geometrischen Weise vorführen, wodurch das Resultat gleich auf die Körper $K(i\sqrt{2})$, $K(i\sqrt{3})$, $K(i\sqrt{7})$ und $K(i\sqrt{11})$ verallgemeinert werden kann.

Wir gehen deshalb von irgendeiner quadratischen Irrationalität $\omega_0 = (P_0 + \sqrt{D})/Q_0 = \mu_0 + i\nu_0$ aus, wo P_0, Q_0, D ganze Zahlen in $K(i)$ bedeuten, und daher ω_0 der quadratischen Gleichung $Q_0 x^2 - 2P_0 x - Q_{-1} = 0$ genügt. Jetzt werden die ganzen rationalen Zahlen a_0 und b_0 aus den Ungleichungen $|\mu_0 - a_0| \leqq 1/2$, $|\nu_0 - b_0| \leqq 1/2$ bestimmt. Im Falle der Gleichheit soll der absolut kleinste der Werte a oder b gewählt werden. Für $\varrho_0 = a_0 + ib_0$ wird

$$(1) \qquad \omega_0 = \varrho_0 + \frac{1}{\omega_1},$$

wo infolge $|\omega_0 - \varrho_0| \leqq \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$: $|\omega_1| \geqq \sqrt{2}$ wird. In derselben Weise fortfahrend geht die folgende Entwicklung

$$(1) \qquad \omega_\tau = \varrho_\tau + \frac{1}{\omega_{\tau+1}} \qquad (\tau = 0, 1, 2, \ldots)$$

hervor und daraus die Äquivalenz

$$(2) \qquad \omega_0 = \frac{\beta_u \omega_u + \beta_{u-1}}{a_u \omega_u + a_{u-1}}, \qquad \beta_u a_{u-1} - \beta_{u-1} a_u = \eta_u = (-1)^u.$$

Wird in gleicher Weise $\omega_0' = (\sqrt{D} - P)/Q_0$ in einer Kette (1) entwickelt, so entsteht die „komplementäre" Kette, die im allgemeinen von der vorigen verschieden ausfällt. Werden nun rationales und irrationales in (1) getrennt, so berechnet man

$$(3) \qquad \begin{aligned} (P_0 P_u + D)\, a_u - P_u Q_0 \beta_u + P_0 Q_u\, a_{u-1} &= Q_0 Q_u \beta_{u-1} \\ (P_0 + P_u)\, a_u - Q_0 \beta_u &= -Q_u a_{u-1} \end{aligned}$$

und nach Elimination von a_{u-1}:

$$(P_0^2 - D) a_u - Q_0 (P_0 - P_u)\beta_u = -Q_0 Q_u \beta_{u-1};\ Q_0 (P_0 + P_u) a_u - Q_0^2 \beta_u = -Q_0 Q_u a_{u-1},$$

[1]) *Hurwitz, J.*: Acta Mathematica, Bd. 25. — *Mathews, B. G.*: Proceedings of the London Math. Society (2) 11.

d. h. die für unsere Zwecke bedeutende Formel

$$(4) \qquad (Q_0\beta_u - P_0\alpha_u)^2 - D\alpha_u^2 = Q_0Q_u(\beta_u\alpha_{u-1} - \beta_{u-1}\alpha_u) = \eta_u Q_0 Q_u$$

oder auch

$$(Q_u\alpha_{u-1} + P_u\alpha_u)^2 - D\alpha_u^2 = \eta_u Q_0 Q_u .$$

Angenommen, es sei in (1) für irgendwelche u: $\omega_u = \pm\,\omega_0$ oder gleich einer der assoziierten Zahlen $\pm\, i\omega_0$, so ergibt sich $P_u = P_0$, $Q_u = \pm\, Q_0$ oder $= \mp\, iQ_0$ und damit aus (3): $2P_0\alpha_u \equiv 0 \pmod{Q_0}$; und angenommen, was stets im folgenden vorausgesetzt wird, D sei ohne quadratische Teiler, so folgt aus (4) unter allen Umständen $2\alpha_u \equiv 0 \pmod{Q_0}$. Multipliziert man also (4) mit $(2/Q_0)^2$, so ergibt sich eine ganzzahlige Lösung μ, ν der Gleichung $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ oder $= \pm 4i$ in $K(i)$. Dabei ist also $\mu^2 - D\nu^2 \equiv 0$ (4). Es sei $D = m + ni$ und erstens $m \equiv n \not\equiv 0$ (2), d. h. $D \equiv 0$ $(1+i)$, weshalb $\mu \equiv 0$ $(1+i)$ und also auch $\nu \equiv 0$ $(1+i)$; mithin ergibt sich dann aus (4) eine Lösung μ, ν der verallgemeinerten *Pell*schen Gleichung $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ oder $\pm i$. Ist ferner $D \not\equiv 0$ $(1+i)$, so gilt jedenfalls $\mu \equiv \nu$ $(1+i)$. Ist dann $m \equiv 0$, $n \not\equiv 0$ (2), und wäre $\mu \equiv \nu \not\equiv 0$ $(1+i)$ in $\mu^2 - D\nu^2$, so wäre $\mu^2 \equiv \pm 1$, $\nu^2 \equiv \pm 1$ (4), d. h. $\mu^2 - D\nu^2 \equiv \pm 1 \pm i \equiv 0$ (2), weshalb uns (4) ebenfalls eine Lösung der *Pell*schen Gleichung geben muß. Im Falle $m \not\equiv 0$, $n \equiv 0$ (2), $\not\equiv 0$ (4) wird $D \equiv \varepsilon^2$ (2), $\not\equiv \varepsilon^2$ (4) ($\varepsilon = 1, i$) und 1, $\tau = (\sqrt{D} + \varepsilon)/(1+i)$ bilden eine Basis des Körpers $K(\sqrt{D})$ [1]. Wäre $\mu \equiv \nu \not\equiv 0$ $(1+i)$, so wäre $\pm 1 \pm D \equiv 0$ (4), unserer Annahme über D widersprechend; es wird daher $\mu \equiv \nu \equiv 0$ $(1+i)$, d. h. nach Wegdivision von $(1+i)^2$: $\mu^2 - D\nu^2 \equiv 0$ (2) aber nicht mehr (mod. $2 + 2i$). Aus (4) gewinnt man diesmal eine Lösung der Gleichung $\mu^2 - D\nu^2 = \pm 2$ oder $\pm 2i$, und somit die Einheit $\eta = \dfrac{\mu - \varepsilon\nu}{1+i} + \dfrac{\sqrt{D} + \varepsilon}{1+i}\nu$. Es kann natürlich eintreffen, daß nochmals $\mu \equiv \nu \equiv 0$ $(1+i)$ wird, und alsdann haben wir eine Lösung von *Pell*s Gleichung, d. h. stets Einheiten des Körpers. Im Falle $m \not\equiv 0$ (2), $n \equiv 0$ (4) endlich wird $D \equiv \varepsilon^2$ (4), 1, $\tau = (\sqrt{D} + \varepsilon)/2$ eine Basis, und aus $\mu^2 - D\nu^2 = \pm 4$, $\pm 4i$ ergibt sich die Einheit $\eta = \dfrac{\mu - \varepsilon\nu}{2} + \dfrac{\sqrt{D} + \varepsilon}{2}\nu$. Wird also aus irgendeiner Ursache in der Äquivalenz (1) $\omega_s = \pm\,\omega_0, \pm\, i\omega_0$, so wird stets eine Einheit des Körpers gewonnen.

Es sei weiter die obige Entwicklung periodisch mit $\omega_u = \omega_0$ und $\beta_u/\alpha_u = \varrho_0 + \dfrac{1}{|\varrho_1} + \cdots + \dfrac{1}{|\varrho_{u-1}} = [\varrho_0, \varrho_1 \cdots \varrho_{u-1}]$ ihre Periode. An diesen Kettenbruch für β_u/α_u sei dieselbe Periode nochmals angehängt, d. h. $\beta_{2u}/\alpha_{2u} = [\varrho_0 \cdots \varrho_{u-1}, \varrho_0 \cdots \varrho_{u-1}]$ gebildet, dann berechnet man aus bekannten Formeln $\dfrac{\beta_{2u}}{\alpha_{2u}} = \dfrac{\beta_u^2 + \beta_{u-1}\alpha_u}{\beta_u\alpha_u + \alpha_{u-1}\alpha_u}$ [2], und da $\beta_u^2 + \beta_{u-1}\alpha_u$ und $\beta_u\alpha_u + \alpha_{u-1}\alpha_u$ sich leicht als relativ prim erweisen, wird $Q_0\beta_{2u} = Q_0(\beta_u^2 + \beta_{u-1}\alpha_u) = Q_0(\beta_u^2 + \beta_u\alpha_{u-1} - \eta_u) = 2Q_0\beta_u^2 - 2P_0\beta_u\alpha_u - Q_0\eta_u$ und $Q_0\alpha_{2u} = Q_0\beta_u\alpha_u + Q_0\alpha_{u-1}\alpha_u = 2\alpha_u(Q_0\beta_u - P_0\alpha_u)$ infolge (3) für $Q_u = Q_0$.

[1] *Sommer, O.*: Vorlesungen über Zahlentheorie 1907, S. 298.
[2] *Perron, O.*: Die Lehre von den Kettenbrüchen 1903, S. 7 Formel 11.

Leicht durchrechnet man $\{(Q_0\beta_u - P_0 a_u) + \sqrt{D}\, a_u\}^2 = (Q_0\beta_u - P_0 a_u)^2 + D a_u^2$
$+ \sqrt{D} 2 a_u (Q_0\beta_u - P_0 a_u) = 2(Q_0^2\beta_u^2 - 2Q_0P_0\beta_u a_u + P_0^2 a_u^2) - Q_u^2\eta_u + \sqrt{D} 2 a_u (Q_0\beta_u - P_0 a_u)$
$= \{Q_0(2Q_0\beta_u^2 - 2P_0\beta_u a_u - Q_0\eta_u) - P_0 2 a_u (Q_0\beta_u - P_0 a_u)\} + \sqrt{D} 2 a_u (Q_0\beta_u - P_0 a_u)$
$= Q_0(Q_0\beta_{2u} - P_0 a_{2u}) + \sqrt{D} Q_0 a_{2u}$.

Das Resultat einer einmaligen Erweiterung der Periode von β_u/a_u wird also gleichwirkend mit einer Erhöhung in (4) zur zweiten Potenz. In derselben Weise wird bei jeder neuen Erweiterung die Potenz in (4) um einen Grad erhöht.

Unser nächstes Ziel ist nun, einen Beweis der Periodizität der Entwicklung (1) zu geben. Wir wollen deshalb annehmen, es sei in (2) $|\beta_u|$ und $|a_u|$ für $u \to \infty$ beschränkt, dann wäre infolge (4) $|Q_u|$ und dann $|P_u|$ beschränkt; mithin wird die Entwicklung (1) sicher periodisch. Dann würde also eine Gleichung (4) für $Q_u = Q_0$ unendlich viele, verschiedene Lösungen haben, was der Annahme, daß $|\beta_u|$ und $|a_u|$ beschränkt seien, widerspricht. Zunächst nehmen wir an, nur eine der beiden Größen $|\beta_u|$ oder $|a_u|$ wächst über jede Grenze, beispielsweise $|a_u|$, da andernfalls wir mit $1/\omega_0$ statt ω_0 in (2) operieren können. Infolge $|a_u| \to \infty$ muß aber eine Teilfolge u_1 in u existieren, für welche ausnahmslos $|a_\varrho| > |a_{\varrho-1}|$ wird. Mit $|\omega_\varrho| \geqq \sqrt{2}$, $\left|\frac{a_{\varrho-1}}{a_\varrho}\right| \leqq 1$ kann dann $\omega_\varrho + \frac{a_{\varrho-1}}{a_\varrho} \to 0$ nie hervorgehen. Also wird

$$\omega_0 - \frac{\beta_\varrho}{a_\varrho} = \frac{-\eta_\varrho}{a_\varrho^2\left(\omega_\varrho + \frac{a_{\varrho-1}}{a_\varrho}\right)} \to 0,$$

d. h. aus $|a_u| \to \infty$ muß ebenfalls $|\beta_u| \to \infty$ folgen. Wir wollen jetzt

$$\omega_\varrho + \frac{a_{\varrho-1}}{a_\varrho} = \frac{-\eta_\varrho}{Z_\varrho} \tag{5}$$

einführen, wo $|Z_\varrho| < M$ ist, und M eine bestimmte endliche Konstante bedeutet. Dies gilt wenigstens für alle ϱ-Werte aus der genannten u_1-Folge. Daraus haben wir

$$\omega_0 - \frac{\beta_\varrho}{a_\varrho} = \frac{Z_\varrho}{a_\varrho^2}.$$

Es sei $\bar{\omega}_u$ die zu ω_u relativ konjugierte Zahl, d. h. für $\omega_\varrho = (P_\varrho + \sqrt{D})/Q_\varrho$ sei $\bar{\omega}_\varrho = (P_\varrho - \sqrt{D})/Q_\varrho$; dann ergibt sich

$$\bar{\omega}_\varrho + \frac{a_{\varrho-1}}{a_\varrho} = \frac{-\eta_\varrho}{a_\varrho^2\left(\bar{\omega}_0 - \frac{\beta_\varrho}{a_\varrho}\right)} = \frac{-\eta_\varrho}{a_\varrho^2\left(\bar{\omega}_0 - \omega_0 + \frac{Z_\varrho}{a_\varrho^2}\right)} \to 0.$$

Wir dürfen also für Zahlen aus unserer u_1-Folge schreiben

$$\bar{\omega}_\varrho + \frac{a_{\varrho-1}}{a_\varrho} = \delta_\varrho, \qquad |\delta_\varrho| \to 0, \tag{6}$$

wie auch

$$\omega_\varrho + \frac{a_{\varrho-1}}{a_\varrho} = \frac{-\eta_\varrho}{Z_\varrho}.$$

Mithin wird

$$\omega_\varrho - \bar{\omega}_\varrho = \frac{-\eta_\varrho}{Z_\varrho} - \delta_\varrho,$$

d. h.

$$|\omega_\varrho - \overline{\omega}_\varrho| \leqq \frac{1}{|Z_\varrho|} - |\delta_\varrho| > \frac{1}{M_1}.$$

Da $\omega_\varrho = (P_\varrho + \sqrt{D})/Q_\varrho$ der quadratischen Gleichung $Q_\varrho x^2 - 2P_\varrho x - Q_{\varrho-1} = 0$ genügt, die durch die Transformation (1) aus der quadratischen Gleichung für ω_0 hervorgeht, so wird $|\omega_\varrho - \overline{\omega}_\varrho| = |2\sqrt{D}/Q_\varrho|$ und also der gegebenen Ungleichung zufolge

$$|Q_\varrho| < 2M_1|\sqrt{D}|.$$

Zudem sieht man aus (6), daß $|\overline{\omega}_\varrho| = |(P_\varrho - \sqrt{D})/Q_\varrho|$ und somit $|P_\varrho/Q_\varrho|$ beschränkt sind, d. h. es wird ebenfalls

$$|P_\varrho| < M_2|Q_\varrho| < 2M_1M_2|\sqrt{D}|.$$

Daraus schließen wir, daß in dieser unendlichen Teilfolge ω_ϱ notwendig dasselbe Element ω_τ wiederholt auftreten muß, d. h. die Entwicklung (1) muß periodisch fortschreiten, was wir eben beweisen wollten.

Wir haben bis jetzt nur $\left|\omega_0 - \frac{\beta_u}{\alpha_u}\right| \to 0$ für die u_1-Folge schließen können, sehen aber auf Grund $\frac{\beta_\varrho}{\alpha_\varrho} - \frac{\beta_{\varrho-1}}{\alpha_{\varrho-1}} = \frac{\eta_\varrho}{\alpha_{\varrho-1}\alpha_\varrho}$, daß in der Tat allgemein $\left|\omega_0 - \frac{\beta_u}{\alpha_u}\right| \to 0$ konvergiert. Über den Grad der Approximation werden wir bald näheres angeben. In Analogie mit den gewöhnlichen Kettenbrüchen finden wir mit Rücksicht auf (6) auch jetzt, daß aus $\left|\omega_0 - \frac{\beta_u}{\alpha_u}\right| \to 0$ die Relation $\left|\overline{\omega}_0 + \frac{\alpha_{u-1}}{\alpha_u}\right| \to 0$ folgt. Es ist jedoch zu bemerken, daß weder ausnahmslos $\left|\frac{\alpha_{u-1}}{\alpha_u}\right| < 1$ ausfällt, noch α_{u-1}/α_u, wie in den gewöhnlichen Kettenbrüchen, den zu β_u/α_u inversen, regulären Kettenbruch darstellt.

Aus dem eben gegebenen Beweise dürfen wir aber weiter schließen, daß die Zahl der geschlossenen Ketten eines festen D endlich sein muß; und wir können eine obere Grenze der $|Q_\tau|$ in ω_τ angeben. Aus der Existenz von Wertfolgen $|\omega_\varrho| \geqq \sqrt{2}, \overline{\omega}_\varrho + \frac{\alpha_{\varrho-1}}{\alpha_\varrho} \to 0, \left|\frac{\alpha_{\varrho-1}}{\alpha_\varrho}\right| \leqq 1$ folgt nämlich unmittelbar $|\omega_\varrho - \overline{\omega}_\varrho| = |2\sqrt{D}/Q_\varrho| \geqq \sqrt{2} - 1$, d. h. die Existenz eines Bruchnenners $|Q_\varrho| \leqq 2(\sqrt{2}+1)|\sqrt{D}|$ in jeder Kette. Eine eindeutige Zuordnung unter Formen mit der Determinante D und Idealzahlen aus dem Körper $K(\sqrt{D})$ vermittelnd, die in der Tat auch noch mit $K(i)$ als Grundkörper sich durchführen läßt, können wir uns der in dieser Theorie bekannten, genaueren Ausdrücke für die obere Grenze von beispielsweise Herrn *Minkowski*: $(4/\pi)^s\, 4!/4^n|\sqrt{D}|$ (n gibt den Grad des Körpers an, s die Anzahl der Paare imaginärer Wurzeln, D die Körperdiskriminante) bedienen. Die Kettenentwicklungen (1) sind sehr geeignet, um das in der Theorie der Ideale vorherrschende Problem der Äquivalenz zu lösen, was wir unten ausführen werden. Auch um die Faktoren einer Primzahl zu finden, leistet die Kettenentwicklung gute Dienste, denn dies kann als ein spezieller Fall des allgemeinen Formenproblems: eine beliebige Zahl A in einer ge-

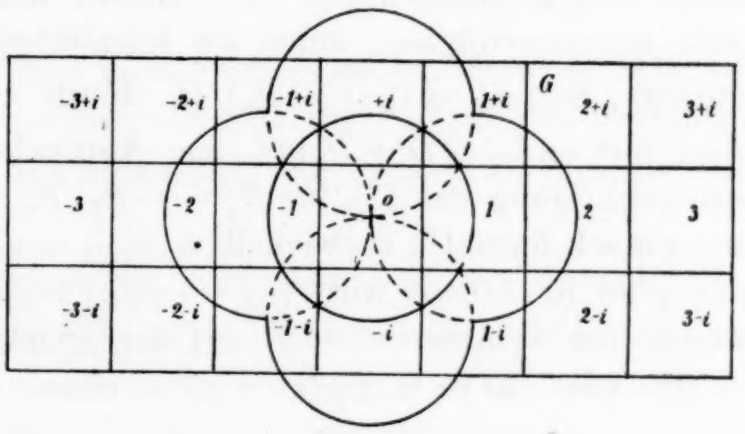
gebenen Form $(a_\varrho, b_\varrho, a_{\varrho-1}) = a_\varrho x^2 + 2b_\varrho xy + a_{\varrho-1}y^2$ darzustellen, aufgefaßt werden. Ganz ähnlich wie in $K(1)$ als Grundkörper[1]) suchen wir alle Lösungen $x = \alpha^{(\nu)}$ von $x^2 \equiv D \pmod{A a_\varrho}$, die gleichzeitig $\pm \alpha^{(\nu)} \equiv b_\varrho \pmod{a_\varrho}$ genügen $(b_\varrho^2 - a_\varrho a_{\varrho-1} = D)$. Mit diesen $\alpha^{(\nu)}$ wird die Kette von $\omega_\nu = (\alpha^{(\nu)} + \sqrt{D})/A a_\varrho$ entwickelt, wobei die und nur die $\alpha^{(\nu)}$ Lösungen abgeben können, für welche ω_ν zur Hauptkette führt. Denn in diesem Falle ergibt sich aus (4) die Lösung

$$(A a_\varrho \beta_x - \alpha^{(\nu)} \alpha_x)^2 - D\alpha_x^2 = \eta_x A a_\varrho .$$

Da $\alpha^{(\nu)} \equiv \pm b_\varrho (a_\varrho)$ ist, wird aber $M_x = A a_\varrho \beta_x - \alpha^{(\nu)} \alpha_x \equiv -\alpha^{(\nu)} \alpha_x \equiv \mp b_\varrho \alpha_x (a_\varrho)$, d. h. $M_x \pm b_\varrho \alpha_x$ muß durch a_ϱ teilbar werden. Mithin wird die ganze Zahl $x = \gamma_x$ aus $K(i)$ eine Lösung der Gleichung $M_x = x a_\varrho \mp b_\varrho \alpha_x$ und folglich

$$a_\varrho \gamma_x^2 \mp 2 b_\varrho \gamma_x \alpha_x + a_{\varrho-1} \alpha_x^2 = \eta_x A ,$$

wie erwünscht wurde. Alle Lösungen werden auch hier durch Multiplikation mit Einheiten gewonnen.



Figur 1.

Wir wollen mit ein paar Worten die geometrische Deutung unseres Verfahrens (1) klarlegen. Wie in Fig. 1 wird die Ebene in Quadrate um die ganzen Zahlen $a + ib$ lückenlos geteilt. Sei $\omega_u = (P_u + \sqrt{D})/Q_u = \mu_u + i\nu_u$, dann bedeutet geometrisch die Bestimmung der ganzen Zahl $\varrho_u = a_u + ib_u$ aus den Ungleichungen $|\mu_u - a_u| \leqq \frac{1}{2}$ $|\nu_u - b_u| \leqq \frac{1}{2}$ die Angabe des Quadrates, in das $\omega_u = \mu_u + i\nu_u$ hineinfällt; und die Operation $\omega_u - \varrho_u = \omega_u'$ ergibt eine Transformation jenes Quadrates in das Quadrat am Nullpunkt, während $\omega_u' = \dfrac{1}{\omega_{u-1}}$ analytisch eine Spiegelung am Einheitkreise darstellt, die bekanntlich durch die Formeln $x_1 = x_2/(x_2^2 + y_2^2)$, $y_1 = -y_2/(x_2^2 + y_2^2)$ gekennzeichnet ist. Infolgedessen werden die Seiten des Ursprungsquadrates in Kreisen wie in Fig. 1 gespiegelt, und das Innere des Quadrates wird in das außerhalb dieser Kreise liegende Gebiet G transformiert. Da nun alle ω_τ in G fallen, so wird ausnahmslos $|\omega_\tau| \geqq \sqrt{2}$. Wir werden bald auf eine ähnliche, geometrische Interpretation für die Körper $K(i\sqrt{2})$ bis $K(i\sqrt{11})$ hinweisen.

---

[1]) *Arwin, A.*: Periodically closed chains of reduced fractions, Annals of Mathematics Vol. 24 S. 53ff.

In einer früheren Arbeit [1]) habe ich gezeigt, daß stets, wenn eine quadratische Kette mit ihrer komplementären zusammenfällt, diese in den Koeffizienten symmetrisch werden muß (und dann nach der Terminologie der Formen ambig genannt werden kann) und somit mit zwei charakteristischen Elementen $\omega_\varrho = (P_\varrho + \sqrt{D})/Q_\varrho$ von der Natur $D = P_\varrho^2 + Q_\varrho^2$ oder $D \equiv 0\ (Q_\varrho/2^\varepsilon)$ ausgestattet ist. Das Vorhandensein dieser Elemente genügt auch in $K(i)$, um die beiden Entwicklungen zum Zusammenfall zu bringen, denn aus $D = P_\varrho^2 + Q_\varrho^2$ folgt sofort die Äquivalenz $(\sqrt{D} - P_\varrho)/Q_\varrho = 1//(\sqrt{D} + P_\varrho)/Q_\varrho$ und aus $D \equiv 0$, $P_\varrho \equiv 0\ (Q_\varrho/(1+i)^\varepsilon)$, wo $\varepsilon = 0$, 1 oder 2, eine Äquivalenz $(\sqrt{D} + P_\varrho)/Q_\varrho = \mu_\varrho + (\sqrt{D} - P_\varrho)/Q_\varrho$, da ja μ_ϱ stets ganzzahlig aus $2P_\varrho = \mu_\varrho Q_\varrho$ zu entnehmen ist. Die Symmetrie in den Koeffizienten des Kettenbruches besteht aber nicht mehr notwendig, und die reguläre oder regelmäßige Entwicklung ist auch nicht die einzige mit der Bedingung $|\omega_\tau| > 1$, sie ist gar nicht eindeutig wie in $K(1)$ durch die Bedingung $|\omega_\tau| > 1$ definiert. In $K(i)$ ist es wenigstens nicht ausgeschlossen, daß noch andere Ketten, die mit ihrer komplementären Kette zusammenfallen, ohne die erwähnten Elemente zu besitzen, existieren können. Sei $\omega'_\tau = (\sqrt{D} - P_\tau)/Q_\tau$ durch eine reguläre Kette $[\varrho_0, \varrho_1 \cdots \varrho_{\tau-1}] = \beta_\tau/\alpha_\tau$ mit $\omega_\tau = (\sqrt{D} + P_\tau)/Q_\tau$ zur Äquivalenz gebracht, dann haben wir unter Berücksichtigung von (3) für $P_0 = -P_\tau$, $P_u = P_\tau$, $Q_0 = Q_u = Q_\tau$, daß $\beta_\tau = \alpha_{\tau-1}$ ist, und sonach formal [2]) entwickelt $\alpha_\tau/\alpha_{\tau-1} = \alpha_\tau/\beta_\tau = [\varrho_{\tau-1} \cdots \varrho_1]$. Machen wir von Anfang an $\varrho_0 = 0$, so wird $[\varrho_1 \cdots \varrho_{\tau-1}] = [\varrho_{\tau-1} \cdots \varrho_1]$, woraus wir aber in $K(i)$ weder auf Symmetrie noch auf die Existenz der erwähnten Elemente $D = P_\varrho^2 + Q_\varrho^2$ oder $D \equiv 0\ (Q_\varrho/(1+i)^\varepsilon)$ ohne weiteres schließen dürfen.

Wir wollen die Möglichkeit, die „kleinste" Lösung von *Pells* Gleichung zu bestimmen, einer Prüfung unterwerfen. Wie wir gesehen haben, muß die Kette von $\omega_0 = \sqrt{D}$ geschlossen werden, und aus der Periode wird eine Lösung $\mu^2 - Dv^2 = \eta$, $(\eta = \pm 1, \pm i)$ in ganzen Zahlen gefunden. Nach allgemeinen Sätzen über Einheiten muß in den von uns betrachteten Zahlkörpern eine einzige Grundeinheit existieren. Folglich müssen alle Lösungen von *Pells* Gleichung sicher durch Potenzieren einer einzigen, der „kleinsten", gewonnen werden können. Sei $\beta_\varrho^2 - D\alpha_\varrho^2 = \eta_\varrho$ diese kleinste Lösung und $(\beta_\varrho + \alpha_\varrho\sqrt{D})^r = \beta_\varrho^{(r)} + \alpha_\varrho^{(r)}\sqrt{D}$. Durch einfaches Ausmultiplizieren wird bestätigt, daß das Produkt $\beta_\varrho^{(r)}\alpha_\varrho^{(r)}$ stets algebraisch durch $\beta_\varrho\alpha_\varrho$ teilbar wird, d. h. $\beta_\varrho^{(r)}\alpha_\varrho^{(r)} = \beta_\varrho\alpha_\varrho\ \psi(\beta_\varrho, \alpha_\varrho)$, wo $\psi(\beta_\varrho, \alpha_\varrho)$ als ganze, von Null verschiedene Zahl in $K(i)$ größer oder wenigstens gleich Eins ausfällt. Wählen wir für r einen bestimmten Zahlenwert, so können bessere Grenzen angegeben werden. Sei nun $D = a + bi$ und $\mu^2 - Dv^2 = \eta$ die aus der Kettenentwicklung gewonnene Lösung, die also entweder selbst die kleinste wird oder andernfalls eine Potenz derselben darstellt. Dann muß im letzteren Falle dem oben Gesagten zufolge die kleinste Lösung β_ϱ, α_ϱ die Ungleichung $|\beta_\varrho\alpha_\varrho| \leq |\mu\nu|$ erfüllen, und wird nach einigen Versuchen gefunden, wenn nicht

[1]) *Arwin, A.*; Periodically usw. S. 43.

[2]) *Perron, O.*: Die Lehre von den Kettenbrüchen 1913, S. 32.

überhaupt schon die kleinste Lösung aus irgendeiner der Kettenentwicklungen gewonnen ist.

Über den Grad der Approximation in (1) können wir folgendes aussagen: Aus (1) und (4) deduzieren wir

$$Q_0\beta_u^2 - 2P_0\beta_u a_u - Q_{-1}a_u^2 = \eta_u Q_\varrho \qquad (\varrho = 1, 2 \cdots \lambda),$$

wo λ die Periode bedeutet. Subtrahieren wir die Gleichung

$$Q_0\omega^2 - 2P_0\omega - Q_{-1} = 0,$$

so wird

$$\left(\omega - \frac{\beta_u}{a_u}\right)\left(Q_0\,\omega + \frac{\beta_u}{a_u}\,Q_0 - 2P_0\right) = \frac{-\eta_u Q_\varrho}{a_u^2},$$

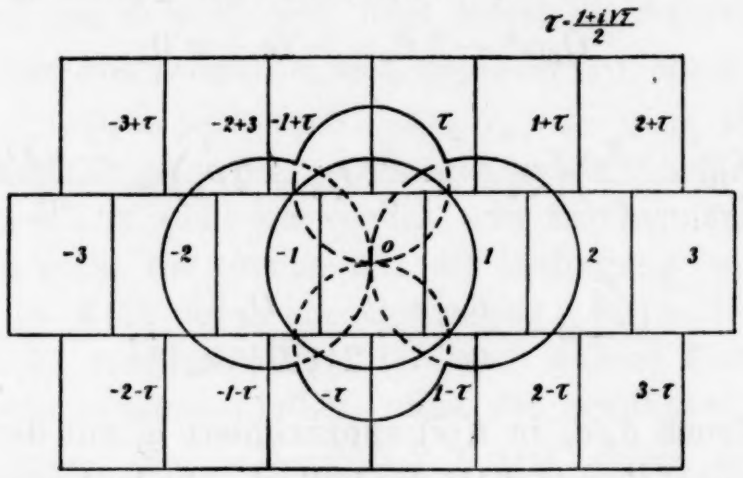
d. h.

$$\left|\omega - \frac{\beta_u}{a_u}\right| \longrightarrow \frac{|Q_\varrho|}{2|\sqrt{D}|\,|a_u|^2}, \tag{7}$$

und der rationale Bruch β_u/a_u in $K(i)$ approximiert ω mit derselben Genauigkeit, wie es bei den Kettenbrüchen in $K(1)$ der Fall ist. Die bestmögliche Approximation geht natürlich für das kleinste $|Q_\varrho|$ der Periode hervor; für $\omega = \sqrt{D}$ wird beispielsweise $|Q_\varrho| = 1$.

Alle oben entwickelten Tatsachen bestehen unverändert für die Zahlkörper $K(i\sqrt{2})$, $K(i\sqrt{3})$, $K(i\sqrt{7})$, $K(i\sqrt{11})$, wie am einfachsten durch einen vergleichenden, geometrischen Gesichtspunkt hervorgeht. In den drei letzten Körpern bilden 1, $\tau = (1 + i\sqrt{3})/2$, $(1 + i\sqrt{7})/2$, $(1 + i\sqrt{11})/2$ eine Basis. Die ganzen Zahlen dieser Körper nehmen die Gestalt $a + b\tau$ an, wo a und b ganze rationale Zahlen sind; und die Zahlen $a + b\tau$ können, genau wie die Zahlen $a + ib$ aus $K(i)$, als ein Punktgitter in die Ebene eingelagert werden. Werden diese Punkte als Mittelpunkte in Rechtecken von den Seitenlängen respektive $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{7}/2$, $\sqrt{11}/2$ und 1 eingeschlossen, so wird dadurch die Ebene lückenlos bedeckt, und da $(\sqrt{11}/4)^2 + (1/2)^2 = 15/16 < 1$ ist, so fällt stets das Rechteck um den Nullpunkt ganz innerhalb des Einheitskreises; auf Grund dieser Tatsache wurde der Beweis der Periodizität geführt, wie ohne weiteres bestätigt wird. In $K(i\sqrt{2})$ werden die Rechtecke ebenso gelagert wie in $K(i)$, in den drei übrigen Fällen werden aber die Rechtecke mit ungeradem b um 1/2 gegenüber den Rechtecken mit geradem b, wie in Fig. 2, verschoben. Haben wir also z. B. $\omega_u = (P_u + \omega)/Q_u$, $\omega^2 = m + n\tau$, $\tau = \dfrac{1 + i\sqrt{11}}{2}$, so muß zunächst in $\omega_u = \mu_u + \nu_u\tau$ die ganze rationale Zahl b_u aus der Ungleichung $|\nu_u - b_u| < 1/2$ bestimmt werden; für ungerades b_u suchen wir $c_u = (2r + 1)/2$ aus $\left|\dfrac{2\mu_u + \nu_u}{2} - c_u\right| < 1/2$, für gerades b_u aber c_u ganzzahlig aus $\left|\dfrac{2\mu_u + \nu_u}{2} - c_u\right| < 1/2$, wodurch erreicht wird, daß $c_u + ib_u\sqrt{11}/2$ stets die Gestalt $a_u + b_u\tau$ mit ganzzahligen a_u und b_u annimmt. Im Ringe $R(i\sqrt{3})$ werden

die Verhältnisse ein wenig abweichend. Hier hat nämlich das Rechteck um den Nullpunkt die vier Punkte $(\pm 1 \pm i\sqrt{3})$ mit dem Einheitkreise gemein, weswegen der Beweis modifiziert werden muß, wie getan werden kann; es werden also auch die Kettenentwicklungen mit Koeffizienten $a \pm ib\sqrt{3}$ periodisch. In $K(i\sqrt{5})$ können ebenfalls mit Hilfe eines Kunstgriffes periodische Ketten entwickelt werden, was wir aber hier übergehen wollen.



Figur 2.

Wir gehen dazu über, die obige Theorie mit Beispielen zu erläutern. Wählen wir $K(i\sqrt{7})$ als Grundkörper und nehmen $\omega = \sqrt{1+3\tau}$, $\tau = (1+i\sqrt{7})/2$, $\tau^2 = \tau - 2$, $\bar{\tau} = 1 - \tau$, $D = [4\,\omega\bar{\omega}(\tau - \bar{\tau})^2]^2 = 4^2 \cdot 7^2 \cdot 22$. Einem allgemeinen Theoreme zufolge[1]) dürfen wir schließen, daß aus einer Äquivalenz (1) mit ganzen Zahlen in $K(i\sqrt{7})$ notwendig eine entsprechende Äquivalenz von Idealen folgt. Es muß aber besonders gezeigt werden, inwiefern umgekehrt aus einer Äquivalenz der Ideale eine Äquivalenz (1) folgt. Die Bedingung hierfür lautet offenbar, daß Zähler und Nenner im Zahlbruche eine Relativbasis konstituieren, was in verschiedenen Fällen ganz wie mit $K(1)$ als Grundkörper bewiesen werden kann[2]). Die Primzahlen, die wir zu untersuchen haben, ergeben sich daher aus der genannten Ungleichung $p_i < (4/\pi)^2 \cdot 4!/4^4 \cdot |\sqrt{D}| \backsim 20$. Sie zerlegen sich wie folgt: $2 = \frac{1+i\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{1-i\sqrt{7}}{2}$, und jene Faktoren werden nochmals in $K(\omega)$ zerlegt; die Primzahl 3 ist in $K(i\sqrt{7})$ unzerlegbar, wird aber in $K(\omega)$ in Faktoren aufgelöst; so auch 13; für 11 gilt $11 = (2+i\sqrt{7}) \cdot (2-i\sqrt{7})$ und jene zerlegen sich wieder in $K(\omega)$; 5, 17 und 19 bleiben in $K(\omega)$ Primzahlen und endlich zerfällt 7 in $K(i\sqrt{7})$, aber nicht in $K(\omega)$. Wir berechnen nun $\omega = \sqrt{1+3\tau} = 1{,}50 + 0{,}79\tau$, und bilden damit nach unserer Regel oben die folgenden Ketten, erstens die Hauptkette

$$\frac{\omega}{1} = 1 + \tau + \frac{1}{\frac{\omega+1+\tau}{2}}; \qquad \frac{\omega+1+\tau}{2} = 1 + \tau + \frac{1}{\frac{\omega+1+\tau}{1}}$$

---

[1]) *Hilbert, D.*: Die Theorie der alg. Zahlkörper, S. 225, Satz 53.

[2]) *Sommer, O.*: Vorlesungen usw. S. 39 ff.

Aus $1+\tau+\dfrac{1}{1+\tau}=\dfrac{3\tau}{1+\tau}$ wird mit Hilfe von (4) $(3\tau)^2-(1+3\tau)(1+\tau)^2=1$ eine Lösung von *Pell*s Gleichung. Um zu entscheiden, ob diese die „kleinste" Lösung sei, haben wir, wie schon gezeigt wurde, alle möglichen Kombinationen β_ϱ, a_ϱ aus der Ungleichung $|\beta_\varrho a_\varrho| \leqq |3\tau(\tau+1)| = 6\sqrt{2}$ zu prüfen; es ergibt sich, daß wir die „kleinste" Lösung in $\eta = 3\tau + \omega(1+\tau)$ erhalten haben. Als zweite Kette wird

$$\frac{\omega+1}{\tau}=2-\tau+\cfrac{1}{\cfrac{\omega+1+\tau}{1-\tau}}; \qquad \frac{\omega+1+\tau}{1-\tau}=-2+2\tau+\cfrac{1}{\cfrac{\omega+1+\tau}{\tau}}$$

ausgerechnet, die von der vorigen verschieden und ambig ist, da $D=1+3\tau\equiv 0 \pmod{Q_\varrho=\tau/2^\varepsilon}$ für $\varepsilon=1$ wird. Diese beiden ambigen Ketten sind tatsächlich die einzigen, denn aus $1^2\equiv 1+3\tau$ (3) folgern wir

$$\frac{\omega+1}{3}=1-\cfrac{1}{\cfrac{\omega+2}{1-\tau}},$$

d. h. die vorige Kette, und aus $4^2\equiv 1+3\tau(2+i\sqrt{7})$:

$$\frac{\omega+4}{2+i\sqrt{7}}=\frac{\omega+4}{1+2\tau}=2-\tau+\cfrac{1}{\cfrac{\omega+2+\tau}{-1}},$$

d. h. die Hauptkette mit $\{(1+2\tau)(2-\tau)-4\}^4-(1+3\tau)\cdot 1^2=1+2\tau$ oder $1+2\tau=(\tau+2-\omega)(\tau+2+\omega)$, und aus

$$\frac{\omega+2-i\sqrt{7}}{2-i\sqrt{7}}=\frac{\omega+3-2\tau}{3-2\tau}=1+\cfrac{1}{\cfrac{\omega}{-(1-\tau)}}; \qquad \frac{\omega}{-(1-\tau)}=+1-\tau+\cfrac{1}{\cfrac{\omega+\tau+1}{-\tau}}$$

erhalten wir nochmals die zweite Kette. Zuletzt ergibt sich

$$\frac{\omega+3+2\tau}{13}=0+\cfrac{1}{\cfrac{3+2\tau-\omega}{\tau}}.$$

Somit sind alle Fälle erledigt und die äquivalente Zusammengehörigkeit der Ideale festgestellt. Die Zahl der geschlossenen Ketten, d. h. die Klassenzahl in $K(\sqrt{1+3\tau})$ wird alsdann 2. Die in diesem Beispiele dargelegten Verhältnisse sind von allgemeingültiger Natur.

Wählen wir nun $K(i)$ als Grundkörper, um Gelegenheit zu haben, einige Analogien mit den quadratischen Körpern über $K(1)$ hervorzuheben. Für ein ganzes rationales $D\equiv 1$ (4) existieren zwei Arten Ketten wie Formen, die eine mit durchgehend geraden Nennern in den Zahlbrüchen, eindeutig Idealen aus dem Körper $K(\sqrt{D})$ korrespondierend, und die zweite mit sowohl geraden als ungeraden Nennern, eindeutig zu Idealen aus dem Ringe $R(\sqrt{D})$ mit dem Führer (2) korrespondierend. Es sei nun $\omega=\sqrt{a+ib}$ ohne quadratische Teiler $\omega^2\equiv\varepsilon^2$ (4), wo $\varepsilon=1$

oder i, dann wird $1, i, \varrho = \frac{\omega + \varepsilon}{2}, i\varrho$ eine Basis[1]) in $K(\omega)$, und es ergeben sich drei verschiedene Typen von Ketten; nämlich diejenigen, deren Bruchnenner alle durch 2 teilbar sind, und diesen Brüchen korrespondieren Ideale aus dem Körper $K(\omega)$, vorausgesetzt, daß der Zahlbruch ω_r mit seinen assoziierten $\pm i\omega_r$ als gleichwertig gerechnet wird; diejenigen, deren Bruchnenner alle durch $1 + i$, doch nicht alle durch 2 teilbar sind, und diesen korrespondieren Ideale aus dem Ringe $R_1(\omega)$ mit der Basis $1, i, \varrho = \frac{\omega + \varepsilon_1}{1 + i}, i\varrho$ und dem Führer $(1 + i)$; zuletzt diejenigen, deren Bruchnenner auch ungerade sein können, d. h. nicht alle durch $(1 + i)$ teilbar sind, und diesen korrespondieren Ideale aus dem Ringe $R_2(\omega)$ mit (2) als Führer und der Basis $1, i, \omega, i\omega$. Um einen Vergleich zwischen der Anzahl der Idealklassen des Zahlkörpers und der Ringe veranstalten zu können, haben wir eine allgemeingültige Formel[1])

$$\frac{h_r}{h} = \frac{\varphi(F) \cdot w_r \cdot R}{\varphi_r(F) \cdot w \cdot R_r}$$

heranzuziehen, wo h und h_r die Zahl der Idealklassen im Körper und im Ringe bedeuten, $\varphi(F)$ und $\varphi_r(F)$ die Zahl der zum Führer (F) relativ primen, inkongruenten Zahlen, w und w_r die Anzahl der Einheitwurzeln, R und R_r die respektiven Regulatoren angeben. Wir wollen dies im Beispiele $\omega = \sqrt{5 + 4i}$ durchführen und berechnen $(4/\pi)^2 \cdot 4!/4^4 \cdot 4 \cdot \sqrt{41} \backsim 3{,}9$. Mit Rücksicht auf $2 = (1 - i)(1 + i)$, $(1 + i) = \frac{\omega - 1}{2} \cdot \frac{\omega + 1}{2}$, $x^2 \equiv\!\!\!\equiv 41$ (3) ist unmittelbar klar, daß im Körper $K(\sqrt{5 + 4i})$ nur eine Klasse, die Hauptklasse, existiert. Wir bilden mit $\omega = \sqrt{5 + 4i} = 2{,}38 + i \cdot 0{,}83$ nach der allgemeinen Regel die Hauptkette

$$\frac{\omega + 1}{2} = 2 + \frac{1}{\frac{\omega + 3}{2(-1 + i)}}; \qquad \frac{\omega + 3}{2(-1 + i)} = -2i - 1 + \frac{1}{\frac{\omega + 2i + 3}{2(-1 + i)}};$$

$$\frac{\omega + 2i + 3}{2(-1 + i)} = -1 - 2i + \frac{1}{\frac{\omega + 3}{2}},$$

und können

$$2 + \frac{1}{|-1 - 2i} + \frac{1}{|-1 - 2i} = \frac{-5 + 6i}{-2 + 4i}, \quad \{4(1 + i)\}^2 - (5 + 4i)(2 + i)^2 = 1$$

daraus entnehmen. Wie im vorigen Beispiel wird bestätigt, daß dieser Wert die kleinste Lösung abgibt, womit diesmal die Grundeinheit des Körpers noch nicht bestimmt ist. Vermittelst der Operation

$$\sqrt{4(1 + i) + \omega(2 + i)} + \sqrt{4(1 + i) - (2 + i)} = \sqrt{(5 + 4i)2}$$

$$\sqrt{4(1 + i) + \omega(2 + i)} - \sqrt{4(1 + i) - (2 + i)} = \sqrt{(3 + 4i)2}$$

---

[1]) *Sommer, O.*: Vorlesungen usw. S. 298.

[2]) *Hilbert, D.*: Zahlber. S. 245, S. 66.

berechnet man

$$\sqrt{2}\sqrt{4(1+i)+(2+i)} = (2+i)+\omega,$$

d. h.

$$(2+i)^2 - (5+4i)\,.\,1^2 = -2 = i(1+i)^2,$$

was die „kleinste" Lösung der Gleichung $x^2 - (5+4i)y^2 = -2$ ergibt, und nun wird die Grundeinheit η des Körpers: $\eta = 1 + \frac{\omega+1}{2}(1-i) = 1 - i + \frac{\omega+i}{1+i}$, die deshalb auch einen Ausdruck der Grundeinheit des Ringes $R_1(\omega)$ liefert. Also werden $R = R_1$, $w = w_1$ und $\varphi(1+i) = \varphi_1(1+i) = 1$, d. h. $h_1 = h = 1$. Die repräsentierende Hauptkette in $R_1(\omega)$ wird durch

$$\frac{\omega+i}{1+i} = 2 + \frac{1}{\frac{\omega+2+i}{1-i}}; \qquad \frac{\omega+2+i}{1-i} = 1+3i+\frac{1}{\frac{\omega+2+i}{1+i}}$$

erzeugt und daraus die Relation $(2+i)^2 - (5+4i)\,.\,1^2 = -2$ ebenfalls erhalten. Um schließlich h_2 zu bestimmen wird die Hauptkette von ω

$$\frac{\omega}{1} = 2 + i + \frac{1}{\frac{\omega+2+i}{2}}; \qquad \frac{\omega+2+i}{2} = 2+i+\frac{1}{\frac{\omega+2+i}{1}}$$

gebildet, wo am deutlichsten die beiden Lösungen $[4(1+i)]^2 - (5+4i)(2+i)^2 = 1$, $(2+i)^2 - (5+4i)\,.\,1^2 = -2$ hervortreten. Also wird $R_2 = 2R$, und für $\varphi(2) = 4$ berechnen wir aus den vier mod. 2 inkongruenten Resten $1, i, (\omega+i)/(1+i)$, $(\omega-i)/(1+i)$: $\varphi_2(2) = 2$, d. h. $h_2 = h = 1$.

Wir wollen hierauf ein Beispiel $\omega^2 \not\equiv \varepsilon^2\,(2)$ folgen lassen, um eine Analogie zwischen diesen Primzahlen aus $K(i)$ und den Primzahlen $q \equiv 3(4)$ aus $K(1)$ hervortreten zu lassen. Bekanntlich ist die Gleichung $x^2 - q\,y^2 = \pm 2$ stets in ganzen Zahlen lösbar, und ebenso auch stets $x^2 - (2a+bi)y^2 = \pm(1 \pm i)$ für $2a+bi$ Primzahl $a \equiv b \not\equiv 0(2)$. Als Zahlenbeispiel wählen wir $\omega = \sqrt{4+5i}$, was also dieselbe Norm wie ω im vorhergehenden Beispiele besitzt, aber durch ganz andere Eigenschaften seiner Ketten gekennzeichnet wird. Hier werden $\sqrt{D} = 4^2.\sqrt{41}$, $(4/\pi)^2\,.\,4!/4^4\,.\,4^2\,.\sqrt{41} \sim 15,7$; und es wird leicht bestätigt, daß 3, 7 und 11 Primzahlen in $K(\omega)$ bleiben; in $5 = (2+i)(2-i)$ werden infolge $i^2 \equiv 4+5i$ (5) beide Faktoren zerlegt; in $13 = (3+2i)\cdot(3-2i)$ wird mit Rücksicht auf $4^2 \equiv 4+5i\,(3+2i)$ dieser Faktor zerlegt, während auf Grund $x^2 \not\equiv 41$ (13) die Zahl $(3-2i)$ Primideal bleibt. Mit $\omega = \sqrt{4+5i} = 2{,}28 + i\,.\,1{,}09$ berechnen wir, wie schon mehrmals, die Hauptkette

$$\frac{\omega}{1} = 2 + i + \frac{1}{\frac{\omega+2+i}{1+i}}; \qquad \frac{\omega+2+i}{1+i} = 3 - i + \frac{1}{\frac{\omega+2+i}{1}}$$

und gewinnen $(8+i)^2 - (4+5i)(3-i)^2 = 1$, wie auch die charakteristische Gleichung $(2+i)^2 - (4+5i)\cdot 1^2 = -(1+i)$. Eine zweite Kettenbruchentwicklung ergibt sich als

$$\frac{\omega+2+2i}{2+i}=2+\frac{1}{\frac{\omega+2}{1+2i}},\qquad \frac{\omega+2}{1+2i}=1-i+\frac{1}{\frac{\omega+i+1}{2-i}},$$

$$\frac{\omega+i+1}{2-i}=1+i+\frac{1}{\frac{\omega+2}{2i-1}},\qquad \frac{\omega+2}{2i-1}=-2i+\frac{1}{\frac{\omega+2i+2}{-2-i}},$$

$$\frac{\omega+2i+2}{-2-i}=-2+\frac{1}{\frac{\omega+2}{-1-2i}},\qquad \frac{\omega+2}{-1-2i}=-1+i+\frac{1}{\frac{\omega+1+i}{-2+i}}$$

$$\frac{\omega+1+i}{-2+i}=-1-i+\frac{1}{\frac{\omega+2}{1-2i}},\qquad \frac{\omega+2}{1-2i}=2i+\frac{1}{\frac{\omega+2+2i}{2+i}},$$

die nicht ambig nach gewöhnlicher Äquivalenz ist. Aus $-i\equiv 2\,(2+i)$ berechnen wir nämlich die komplementäre Kette

$$\frac{\omega+2}{2+i}=2+\frac{1}{\frac{\omega+2+2i}{1-2i}},$$

wo das Element $(\omega+2+2i)/(1-2i)=i(\omega+2+2i)/(2+i)$ dem Elemente $(\omega+2+2i)/(2+i)$ assoziiert ist. Wir haben also hier ein Beispiel dafür, daß wenigstens bei erweiterter Äquivalenz die beiden Kettenbruchentwicklungen als zusammenfallend zu rechnen sind, ohne charakteristische Elemente $D=P^2+Q^2$, $D\equiv 0(Q_\varrho/(1+i)^\varrho)$ zu besitzen[1]). Und da wir uns die Aufgabe gestellt haben, die Zahl der Idealklassen in $K(\omega)$ zu bestimmen, so muß, wie wir schon auseinander gesetzt haben, eine derartige Erweiterung vorgenommen werden, um die eindeutige Zuordnung zwischen Bruch und Ideal aufrecht zu erhalten. Zuletzt erhält man die Entwicklung

$$\frac{\omega+4}{3+2i}=2-i+\frac{1}{\frac{\omega+4+i}{-3+i}};\qquad \frac{\omega+4+i}{-3+i}=-2-i+\frac{1}{\frac{\omega+3}{2-i}},$$

d. h. die vorige Kette. Die Klassenzahl in $K(\sqrt{4+5i})$ wird also 2.

Jetzt werden wir den Beweis erbringen, daß $\mu^2-\nu^2(2a+bi)=\pm(1\pm i)$ stets lösbar sein muß, wenn $a\equiv b\not\equiv 0\ (2)$ ist. Sei $\alpha^2-\beta^2(2a+bi)=\pm 1$ oder $\pm i$ die kleinste Lösung von *Pell*'s Gleichung, wo infolge $(\pm i)^{\frac{4a^2+b^2-1}{2}}=-1$ die letztere Möglichkeit auszuschließen ist, und sei $\alpha=r+si$, $\beta=m+ni$, dann erhält man

$$r^2-s^2-2a(m^2-n^2)+2mnb=\pm 1$$
$$2rs-4mna-b(m^2-n^2)=0$$

und folglich $b(m^2-n^2)\equiv 0\ (2)$, d. h. entweder $m\equiv n\equiv 0\ (2)$ oder $m\equiv n\not\equiv 0\ (2)$,

---

[1]) Schreiben wir aber die obige Formation in der Gestalt $\frac{\omega+2+2i}{2+i}=2+\frac{i}{\frac{\omega+i}{2-i}}$ etc., so wird es auch in diesem Falle keine Ausnahme, indem statt $D=P^2+Q^2$ die Relation $D=P^2+iQ^2$ zu berücksichtigen ist und in der Tat $4+5i=(1+i)^2+i(-2+i)^2$ wird.

d. h. r oder $s \equiv 0\ (2)$. Sei dann 1) $r \equiv 0\ (2)$ und -1, oder 2) $s \equiv 0\ (2)$ und $+1$ das Zeichen in *Pell*'s Gleichung, dann wird $2mnb \equiv 0\ (4)$, d. h. $m \equiv n \equiv 0\ (2)$. Im ersteren Falle 1) wird für $\omega = \sqrt{2a + bi}$

$$\sqrt{a + \omega\beta} + \sqrt{a - \omega\beta} = \sqrt{2(a + i)}$$
$$\sqrt{a + \omega\beta} - \sqrt{a - \omega\beta} = \sqrt{2(a - i)}\,.$$

Mit der Annahme $r \equiv 0\ (2)$ wird also $a + i \equiv a - i \equiv 0\ (2)$ und daher $\sqrt{a + \omega\beta} = \mu + \nu\omega$, wo jetzt μ und ν ganze Zahlen in $K(i)$ angeben. Also wäre $\mu^2 - \nu^2(2a + bi) = \pm i$, was mit $(\pm i)^{\frac{4a^2 + b^2 - 1}{2}} = -1$ nicht vereinbar ist. Für $s \equiv 0\ (2)$ ergibt sich in derselben Weise eine Gleichung $\mu^2 - \nu^2(2a + bi) = \pm 1$, die unserer Annahme widerspricht, daß α und β die kleinsten Lösungen seien. Also haben wir nur noch die beiden Möglichkeiten 1) $r \equiv 0\ (2)$ und $+1$, 2) $s \equiv 0\ (2)$ und -1 als Zeichenkombinationen zu prüfen. Diesmal wird notwendig $m \equiv n \not\equiv 0\ (2)$ und deshalb 1)

$$\sqrt{a + \omega\beta} + \sqrt{a - \omega\beta} = \sqrt{2(a + 1)}$$
$$\sqrt{a + \omega\beta} - \sqrt{a - \omega\beta} = \sqrt{2(a - 1)}\,,$$

wo die Kongruenzen $a + 1 \equiv a - 1 \not\equiv 0\ (2)$, aber $\equiv 0\,(1 + i)$ erfüllt sind. Auch im zweiten Falle werden $a + i \equiv a - i \not\equiv 0\ (2)$, und $\equiv 0\,(1 + i)$, womit das Bestehen der behaupteten Gleichung $\mu^2 - \nu^2\,(2a + b\,i) = \pm\,(1 \pm i)$ erwiesen ist. Der Schluß wird auch noch für $4a + b\,i$ gültig, insofern $\alpha^2 - \beta^2(4a + bi) = \pm 1$ die kleinste Lösung abgibt, was nicht stets der Fall zu sein braucht, wie schon das einfache Beispiel $2^2 - (4 + i)\,.\,1^2 = -i$ lehrt.

Mit Hilfe des Umstandes, daß alle ambigen Ketten in $K(1)$ Elemente $D = P_\varrho^2 + Q_\varrho^2$, $D \equiv 0\ (Q_\varrho / 2^s)$ haben, wird gezeigt, daß in den Fällen $D = p \equiv 1\ (4)$, $D = q \equiv 3\ (4)$, $D = q_1 q_2 \equiv 1\ (4)$ nur eine einzige ambige Kette jeder Art existieren kann, und da die übrigen Ketten paarweise auftreten, muß also die Zahl der geschlossenen Ketten ungerade werden[1]). Auf diese Tatsache läßt sich sodann ein Beweis des quadratischen Reziprozigesetzes bauen. Ein ähnlicher Weg, den Beweis in $K(i)$ zu führen, ist weit schwieriger zu verfolgen. Das Reziprozitätsgesetz in $K(i)$ kann aber als eine Art Umdeutung des Gesetzes in $K(1)$ aufgefaßt werden, wie wir jetzt für $K(i\sqrt{2})$ auseinandersetzen werden. Sei p_1 und p_2 zwei Primzahlen, $p_1 = a^2 + 2b^2$, $p_2 = m^2 + 2n^2$. Die Kongruenz $-m \equiv i\sqrt{2}n(m + in\sqrt{2})$ zieht die folgende

$$n^{\frac{p-1}{2}}(a + ib\sqrt{2})^{\frac{p-1}{2}} \equiv (an - bm)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{m + in\sqrt{2}}$$

nach, d. h. einfach

$$\left(\frac{a + ib\sqrt{2}}{m + in\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{n(an - bm)}{p}\right), \tag{8}$$

womit die Behauptung eigentlich schon bestätigt worden ist. Im Falle $8s_1 + 1 = p = m^2 + 2n^2$ wird $m \not\equiv 0$, $n \equiv 0\ (2)$ und für $8s_2 + 3 = q = a^2 + 2b^2$ wird $a \equiv b \not\equiv 0\ (2)$.

---

[1]) *Arwin, A.*: Annals of Mathematics Vol. 25, S. 110.

Mit $n = 2^u n_1$, $n_1 \equiv\!\!\!| \equiv 0\ (2)$ wird, wenn das Reziprozitätsgesetz in $K(1)$ als bewiesen vorausgesetzt wird, $(n_1/p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{n_1-1}{2}}(p/n_1) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{n_1-1}{2}}((m^2+2n^2)/n_1)$ $= (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{n_1-1}{2}}$, d. h. für $p = 8n+1$ wird $(n/p) = +1$, und für $q = 8n+3$ wird $(q-1)/2 \equiv 1\ (2)$, $n_1 = b$, also $(b/q) = (-1)^{\frac{b-1}{2}}$. Mit der Annahme $2^\nu A = an - mb > 0$, $A \equiv\!\!\!| \equiv 0\ (2)$ ergibt sich dem verallgemeinerten Reziprozitätsgesetze zufolge

$$\left(\frac{A}{pp_1}\right) = (-1)^{\frac{pp_1-1}{2}\cdot\frac{A-1}{2}}\left(\frac{pp_1}{A}\right)$$

$$= (-1)^{\frac{pp_1-1}{2}\cdot\frac{A-1}{2}}\left(\frac{(am+2bn)^2+2(an-bm)^2}{A}\right) = (-1)^{\frac{pp_1-1}{2}\cdot\frac{A-1}{2}}.$$

Sei nun erstens $p \equiv p_1 \equiv 1\ (8)$, dann wird

$$\left(\frac{n(an-mb)}{p}\right) = \left(\frac{n(an-mb)}{p_1}\right)$$

oder einfach

$$\left(\frac{m+in\sqrt{2}}{a+ib\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{a+ib\sqrt{2}}{m+in\sqrt{2}}\right).$$

Im Falle $q \equiv q_1 \equiv 3\ (8)$ berechnet man aus $q \cdot q_1 \equiv 1\ (4)$, $(n/q) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$, $(b/q_1) = (-1)^{\frac{b-1}{2}}$:

$$\left(\frac{n(an-bm)}{q}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{b-1}{2}}\left(\frac{b(an-bm)}{q_1}\right),$$

d. h.

$$\left(\frac{m+in\sqrt{2}}{a+ib\sqrt{2}}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{b-1}{2}+1}\left(\frac{a+ib\sqrt{2}}{m+in\sqrt{2}}\right).$$

Zuletzt wird für $p = 8s+1 = m^2+2n^2$, $q = 8s+3 = a^2+2b^2$, $(pq-1)/2 \equiv 1\ (2)$, $an - bm = A \equiv 1\ (2)$ auf Grund von $a \equiv b \equiv m \equiv\!\!\!| \equiv 0\ (2)$ und infolge $(n/p) = +1$, $(b/q) = (-1)^{\frac{b-1}{2}}$:

$$\left(\frac{m+in\sqrt{2}}{a+ib\sqrt{2}}\right) = (-1)^{\frac{A-1}{2}+\frac{b-1}{2}+\varepsilon}\left(\frac{a+ib\sqrt{2}}{m+in\sqrt{2}}\right),$$

wo $\varepsilon = 1$ oder 0, je nachdem $A = an - bm > 0$ oder < 0 ausfällt, und somit ist das gewünschte Resultat in der Tat gewonnen. Man sieht aber, wie der Ausdruck dieses Reziprozitätsgesetzes viel komplizierter als in $K(i)$ wird. Beiläufig können wir leicht den biquadratischen Restcharakter von 2 (mod. $p = 8n+1$) angeben, indem wir in (8) einfach $a = 0$, $b = 1$ einführen. Einerseits ergibt sich die Bedingung $(-mn/p) = +1$, andrerseits $(i\sqrt{2})^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{4}} 2^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1\ (p)$. Wie wir schon gezeigt haben, ist $(n/p) = +1$, und infolge $m \equiv\!\!\!| \equiv 0\ (2)$ berechnen wir $(m/p) = (p/m) = (m^2+2n^2/m) = (2/m) = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$. Daraus schließen wir, daß 2 für $p = m^2+2n^2 \equiv 1\ (8)$ biquadratischer Rest wird, sobald $m \equiv \pm 1\ (8)$ ist,

sonst nicht[1]). Andere derartige Regeln können leicht auch für 3 und allgemeinere Zahlen abgeleitet werden.

Wir wollen noch als Beispiele die beiden Körper $K(j)$, $j^2 = i$, der einen recht bemerkenswerten Übergang zu den Körpern $K(i\sqrt{2})$ und $K(\sqrt{2})$ vermittelt, und $K(j\sqrt[4]{2})$ mit $K(i\sqrt{2})$ als Grundkörper heranziehen.

In $K(j)$ bilden $1, i, j, ij$ eine Basis und, da $(4/\pi)^2 \cdot 4!/4^4 \cdot 4^2 \backsim 2{,}5$ wird, haben wir die Zahl 2 oder $1+i$ auf ihre Zerlegbarkeit zu prüfen. Mit $j = \sqrt{i} = \sqrt{1/2} + i\sqrt{1/2} = 0{,}707 + i \cdot 0{,}707$ berechnen wir

$$\frac{i+j}{1+i} = 1 + i + \frac{1}{\frac{i+j}{1}}; \qquad i^2 - 1^2 \cdot i = (i+j)(i-j) = -(1+i).$$

Also existiert in $K(j)$ nur die eine Klasse, die Hauptklasse. Durch Potenzerhebung wird $(i+j)^2 = (-1+i) + 2ij$, d. h. $(-1+i)^2 - i(2i)^2 = 2i$ oder $1^2 - i(1-i)^2 = -1 = \{1 + j(1-i)\}\{1 - j(1-i)\}$. In $\eta = 1 + j(1-i)$ besitzen wir daher die Grundeinheit des Körpers. Die Hauptkette

$$\frac{j}{1} = 1 + i + \frac{1}{\frac{j+i+1}{-i}}, \qquad (1+i)^2 - i \cdot 1^2 = (1+i+j)(1+i-j) = i$$

gibt Anlaß zur Einheit $(1+i+j)$, und beide Einheiten sind infolge $-ij(1+i+j) = 1 + j(1-i)$, da $-ij = -j^3$ eine Einheitswurzel ist, als „kleinste" Lösungen anzusehen. Um die Zerlegung der Primzahlen $a+bi$ durchzuführen, haben wir die Bedingung einer Kongruenz $x^2 \equiv i\,(a+bi)$, d. h. $x^2 \equiv -a/b\,(p = a^2+b^2)$ zu prüfen, da x für $a+bi$ Primzahl als rationale, ganze Zahl gewählt werden darf. Zufolge $p = (a+b)^2 - 2ab$ wird $(-ab/p) = (2/p)$, d. h. alle Primzahlen $p = 8n+1$, die in $K(i)$ Primzahlen $(4a+bi)$ werden, werden in $K(j)$ wieder zerlegt, während die Primzahlen $p = 8n+5$, die in Primzahlen von der Gestalt $(2a+bi)\,a \not\equiv 0\ (2)$ faktorisiert werden, in $K(j)$ Primideale bleiben. Weiter müssen die Primzahlen $q = 4n+3$, die in $K(i)$ nicht zerlegt werden, infolge $(-1)^{\frac{q^2-1}{4}} = +1$ in $K(j)$ in Faktoren aufgelöst werden.

Beispiel. $p = 89 = 8^2 + 5^2; \qquad x^2 \equiv -8/5 \equiv 34, \quad x \equiv 37\ (89)$

$$\frac{37+j}{8+5i} = 3 - 2i + \frac{1}{\frac{j-3-i}{-1}}; \qquad (3+i)^2 - i \cdot 1^2 = 8 + 5i$$

$$q = 19; \qquad \{3(1-i)\}^2 \equiv i\ (19)$$

$$\frac{j+3(1-i)}{19} = 0 + \frac{1}{\frac{j-3(1-i)}{i}}, \qquad \{3(1-i)\}^2 - i \cdot 1^2 = -19i,$$

[1]) *Gauß, C. F.*: Untersuchungen über höhere Mathematik, *D. v. Maser*, S. 520, § 13.

d. h. $(19) = \{3(1-i)+j\}\{3(1-i)-j\}$. Es sei zunächst $p \equiv 1$ (8) und auf Grund dessen

$$(9) \qquad \begin{aligned} p = a^2 + b^2 = &\{(m+ni) + j(r+si)\}\{(m+ni) - j(r+si)\} \\ &\{(m-ni) + ij(r-si)\}\{(m-ni) - ij(r-si)\}. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die beiden äußeren wie die beiden inneren Klammern miteinander, so ergeben sich zwei Faktoren

$$(10) \qquad (m^2+n^2+r^2+s^2) \pm j(1-i)(mr+sn+rn-sm),$$

d. h.

$$p = a^2 + b^2 = (m^2+n^2+r^2+s^2)^2 - 2(mr+sn+rn-sm)^2.$$

Desgleichen berechnet man

$$p = a^2 + b^2 = (m^2+n^2-r^2-s^2)^2 + 2(mr+sn-rn+sm)^2,$$

was bemerkenswerte Relationen zwischen diesen drei Körpern erbringt. Wir können die gefundene Tatsache so formulieren: Wird $p \equiv 1$ (8), wie in (9) zerlegt, so werden die Ausdrücke $m^2+n^2-r^2-s^2 = M$ und $mr+sn-rn+sm = N$ absolute Invarianten und geben stets die eine und nur die eine Lösung $M^2+2N^2 = p$, während $m^2+n^2+r^2+s^2 = M_1$, $mr+sn+rn-sm = N_1$ die positiven Auflösungen der Gleichung $M_1^2 - 2N_1^2 = p$ darstellen. Die Invarianz der gegebenen Ausdrücke können wir verifizieren wie folgt. Wir haben beispielsweise

$$\{(m-ni)+ij(r-si)\}(1+i+j) = \{(m+n-r)-i(n-m-s)\}$$
$$+ij\{(-n+r+s)-i(s+m-r)\} = (m_1 - n_1 i) + ij(r_1 - s_1 i),$$

und es können die beiden Identitäten

$$m^2+n^2-r^2-s^2 = (m+n-r)^2 + (n-m-s)^2 - (-n+r+s)^2 - (s+m-r)^2$$
$$mr+sn-rn+sm = (m+n-r)(-n+r+s) + (n-m-s)(s+m-r)$$
$$-(-n+r+s)(n-m-s) + (s+m-r)(m+n-r)$$

leicht ausgerechnet werden. Der imaginäre Körper $K(j)$ vom vierten Grade führt derartig zum reellen Körper $K(\sqrt{2})$ über, daß jeder Lösung m, n, r und s stets eine Lösung M_1, N_1 und jeder Einheit infolge $(1+i+j)(1-i-ij) = 3 + j(1-i)2$ eine Einheit $3+2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2$ korrespondieren, weshalb die positiven Lösungen aus $p = M_1^2 - 2N_1^2$ gewonnen werden müssen.

Im Körper $K(j\sqrt[4]{2})$ wird 1, $i\sqrt{2}$, $\omega = j\sqrt[4]{2}$, $i\omega$ eine Basis, und zufolge $(4/\pi)^2 \cdot 4!/4^4 \cdot 4^2 \cdot \sqrt{2} < 4$ brauchen wir nur die 4 Bruchnenner $1, i\sqrt{2}, 1-i\sqrt{2}, 1+i\sqrt{2}$ zu prüfen. Aus $\omega = 0,841 + i\sqrt{2} \cdot 0,595$ geht die folgende Hauptkette hervor:

$$\frac{\omega}{1} = 1 + i\sqrt{2} + \frac{1}{\dfrac{\omega+1+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}}}, \qquad \frac{\omega+1+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}} = i\sqrt{2} + \frac{1}{\dfrac{\omega+1}{-1}},$$

und deshalb wird $(i\sqrt{2}-1)^2 - i\sqrt{2}(i\sqrt{2})^2 = -1$, d. h. $\eta = (i\sqrt{2}-1) + \omega i\sqrt{2}$ wird die Grundeinheit des Körpers. Der Bruch $\dfrac{\omega+i\sqrt{2}}{i\sqrt{2}}$ ergibt

$$\frac{\omega + i\sqrt{2}}{i\sqrt{2}} = 2 + \frac{1}{\dfrac{\omega + i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{2}}}, \qquad \frac{\omega + i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{2}} = -1 + i\sqrt{2} = \frac{1}{\dfrac{\omega + 1 + i\sqrt{2}}{1}},$$

d. h. die vorige Kette. Da nun weiter $x^2 \equiv\!\!\!| \equiv i\sqrt{2}(1 + i\sqrt{2})$ aus $x^2 \equiv\!\!\!| \equiv -1$ (3) folgt, so wird in $K(j\sqrt[4]{\sqrt{2}})$ die Klassenzahl gleich 1. Von $x^2 \equiv i\sqrt{2}(a + ib\sqrt{2})$, $p = a^2 + 2b^2$ ausgehend erhalten wir nochmals $x^2 \equiv -ab/b^2\ (p)$, d. h. die Gleichung $(-ab/p) = +1$ als Bedingung einer Faktorenzerlegung der Primzahl $a + ib\sqrt{2}$. Sei $p = 8n + 1$, dann werden $a \equiv\!\!\!| \equiv 0$ (2), $b \equiv 0$ (2), $b = 2^\nu b_1$, $b_1 \equiv\!\!\!| \equiv 0$ (2) und daher $(a/p) = (p/a) = (a^2 + 2b^2/a) = (2/a) = (-1)^{\frac{a^2-1}{8}}$, $(2^\nu b_1/p) = (p/b_1) = +1$, woraus folgt: Die Primzahlen $a + ib\sqrt{2}$ mit $a \equiv \pm 1$ (8), $b \gtrless 0$, $a^2 + 2b^2 \equiv 1$ (8) werden in $K(j\sqrt[4]{\sqrt{2}})$ zerlegt, die mit $a \equiv \pm 3$ (8) werden nicht zerlegt.

Beispiel. $89 = 9^2 + 2 \cdot 2^2$.

Für $9 + i2\sqrt{2}$ ergibt sich fast unmittelbar $9 + i2\sqrt{2} = (3 + i\sqrt{2}\omega)(3 - i\sqrt{2}\omega)$; für $9 - i2\sqrt{2}$ berechnet man $x^2 \equiv i\sqrt{2}$ $(9 - i2\sqrt{2}$, $x^2 \equiv 9/2$, $x \equiv \pm 7$ (89),

$$\frac{\omega + 7}{9 - 2i\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{\dfrac{\omega + 2 - 2i\sqrt{2}}{i\sqrt{2}}}, \qquad \frac{\omega + 2 - 2i\sqrt{2}}{i\sqrt{2}} = -1 - i\sqrt{2} + \frac{1}{\dfrac{\omega + i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{2}}},$$

$$\frac{\omega + i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{2}} = -1 + i\sqrt{2} + \frac{1}{\dfrac{\omega + 1 + i\sqrt{2}}{+1}}, \qquad 1 + \frac{1}{|-1 - i\sqrt{2}|} + \frac{1}{|-1 + i\sqrt{2}|} = \frac{3 + i\sqrt{2}}{4},$$

weshalb $\{(3 + i\sqrt{2})(9 - i2\sqrt{2}) - 4 \cdot 7\}^2 - i\sqrt{2} \cdot 4^2 = \{3(1 + i\sqrt{2})\}^2 - i\sqrt{2} \cdot 4^2$ $= -(9 - i2\sqrt{2})$ oder mit Hilfe einer Einheit $\{1 + \omega(2 + i\sqrt{2})\}\{1 - \omega(2 + i\sqrt{2})\}$ $= (9 - i2\sqrt{2})$. Für Primzahlen $q = 8n + 3$, $q = a^2 + 2b^2$ lesen wir $a \equiv b \equiv\!\!\!| \equiv 0$ (2) ab, daher $(a/q) = (q/a) \cdot (-1)^{\frac{a-1}{2}} = (2/a) \cdot (-1)^{\frac{a-1}{2}} = (-1)^{\frac{a-1}{2} + \frac{a^2-1}{8}}$,

$(b/q) = (q/b) \cdot (-1)^{\frac{b-1}{2}} = (-1)^{\frac{b-1}{2}}$, d. h. für $b > 0$ wird $(-ab/q) = +1$ in den Fällen $b \equiv 1$ (4), $a \equiv 5, 7$ (8), $b \equiv 3$ (4), $a \equiv 1, 3$ (8); für $b < 0$ in den Fällen $|b| \equiv 1$ (4) $a \equiv 1, 3$ (8), $|b| \equiv 3$ (4), $a \equiv 5, 7$ (8); die Primzahlen $q = 8n + 3$ werden also in drei verschiedene Faktoren aufgelöst. Wir bestätigen z. B., daß $1 + i\sqrt{2}$ Primzahl bleibt, während $1 - i\sqrt{2} = (1 + \omega)(1 - \omega)$ wird. Die Primzahlen $p = 8n + 5$ bleiben auch noch in $K(\omega)$ Primzahlen, weil

$$(i\sqrt{2})^{\frac{p^2-1}{2}} \equiv 2^{\frac{p^2-1}{4}} \equiv 2^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2}} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1\ (p).$$

Die Primzahlen $8n + 7$ ergeben dagegen:

$$(i\sqrt{2})^{\frac{p^2-1}{2}} \equiv 2^{\frac{p^2-1}{4}} \equiv 2^{p-1 \cdot \frac{p+1}{4}} \equiv 1\ (p),$$

und sie werden folglich zerlegt.

Beispiel. $p = 23, \quad (3 + i4\sqrt{2})^2 \equiv i\sqrt{2}\ (23),$

$$\frac{\omega + 3 + 4i\sqrt{2}}{23} = 0 + \frac{1}{\dfrac{\omega - 3 - 4i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{2}}}; \qquad \frac{\omega - 3 - 4i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{2}} = 2 - 2i\sqrt{2} + \frac{1}{\dfrac{\omega + 1}{-1}},$$

also $(1 - i2\sqrt{2})^2 - i\sqrt{2}(2 - i2\sqrt{2})^2 = -23.$

Zum Schluß mag angedeutet werden, daß die quadratischen Irrationalitäten im Quaternionenkörper sich wahrscheinlich auch mit Hilfe von Gittern des vierdimensionalen Raumes in periodische Ketten entwickeln lassen.

Berichtigung zu der Arbeit
„Eine Axiomatisierung der Mengenlehre“ von *J. v. Neumann*
in Band 154, Seite 219—240

1. Seite 221, Fußnote, 3. Zeile v. u.:) zu streichen.
2. Seite 222, Zeile 5 v. o.:) zu streichen.
3.! Seite 223, Zeile 13 v. o.: statt „$y = [by]$“ soll „$y = [bx]$“ stehen.
4.! Seite 225, Zeile 24 v. o.: statt „$[a((\ldots((x_1x_2)x_3)x_n)]$“ soll „$[a((\ldots((x_1x_2)x_3)\ldots)x_n)]$“ stehen.
5. Seite 225, Zeile 6 v. u.: statt „$[ay \neq A$“ soll „$[ay] \neq A$“ stehen.
6. Seite 229, Zeile 11 v. o.:) zuzusetzen.
7.! Seite 229, Zeile 18 v. o.:
8.! Seite 230, Zeile 7 v. o.: } statt „$[c, a]$“ soll „$|[c, a]|$“ stehen.
9.! Seite 230, Zeile 23 v. o.: statt „$(x, y)_{\varepsilon'}$“ soll „$[x, y]_{\varepsilon'}$“ stehen.
10.! Seite 230, Zeile 26 v. o.: statt „(x, y)“ soll „$(x, y)_{\varepsilon'}$“ stehen.
11.! Seite 231, Zeile 7 v. o.: statt „$[a(x, y)_P]$“ soll „$[a(x, y_P)]_P$“ stehen.
12. Seite 232, Fußnote, Zeile 9 v. u.: statt „Didenskapsselskapets“ soll „Videnskapsselskapets“ stehen.
13. Seite 234, Zeile 28 v. o.: statt „1 oder II Dinge“ soll „I oder II Dinge“ stehen.
14. Seite 234, Fußnote, Zeile 1 v. u.: statt „233“ soll „238“ stehen.
15. Seite 235, Zeile 19 v. o.: statt „es ist“ soll „es ist klar“ stehen.
16.! Seite 238, Zeile 4—6 v. u.: statt (,) soll wiederholt { , } stehen.
17. Seite 240, Zeile 2 v. o.: statt „Kapitel 3“ soll „§ 3“ stehen.

RR3

MAY 12 1928

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schäfer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 155.

Heft 3.

Ausgegeben den 15. April

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1926

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 155. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

Fraenkel, Adolf, Axiomatische Theorie der geordneten Mengen. (Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. II.) . . . . . Seite 129

Stammler, Gerhard, Elementare Betrachtungen über gesetzmäßig aufgebaute Zahlverknüpfungen im Gebiete der rationalen Zahlen . . . . . — 159

Przewisinski, Oskar, Die dynamische Stabilität der Bewegung eines Massenpunktes der von 2 festen Zentren nach dem *Newton*schen Gesetz attrahiert wird. . . . . — 173

Bigler, Über eine *Heine*sche Potentialaufgabe . . . . . — 188

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Axiomatische Theorie der geordneten Mengen. (Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. II.)

Von *Adolf Fraenkel* in Marburg.

Inhalt:

	Seite
Einleitung	129
§ 1. Das Axiomensystem. Hilfsmittel aus der Äquivalenztheorie	131
§ 2. Die geordneten Mengen	135
§ 3. Theorie der Ähnlichkeit	145
§ 4. Über die abgezählten (und die geordneten endlichen) Mengen	153

Einleitung.

Herr *Zermelo* hat 1908 unter dem Titel „Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I.“ [1]) eine Abhandlung veröffentlicht, die auf der Grundlage seines bekannten Axiomensystems die Hauptsätze der Mengenlehre, soweit der Ordnungsbegriff nicht in sie eingeht, (also einen Abriß der Theorie der *Äquivalenz*) entwickelt. Die gleichzeitig angekündigte Fortsetzung, die die Lehre von der Wohlordnung entwickeln sollte, steht bisher noch aus; sie wird in dem nachstehenden Aufsatz, dem ein weiterer sich anschließen soll, gegeben.

In den letzten Jahren sind gegen verschiedene Teile der *Zermelo*schen Axiomatik eine Reihe von Bedenken erhoben worden [2]). Die meisten unter ihnen lassen sich entweder leicht beheben oder sind von nicht grundsätzlicher Art, nämlich auf spezielle Fragen beschränkt. Der ernsteste Einwand betrifft das Aussonderungsaxiom, das sich auf „die allgemeingültigen logischen Gesetze“ und den Eigenschaftsbegriff berufen mußte und dem schon 1910 Herr *Grelling* eine — freilich ganz unzureichende — Erweiterung zu geben sich genötigt sah [3]). Es gelang erst neuerdings, auch hierfür ein präzis-mathematisches Axiom von schein-

[1]) Math. Annalen, **65**, 261—281. *Nachstehend zitiert mit* Z.

[2]) *A. Fraenkel*, Zu den Grundlagen der *Cantor-Zermelo*schen Mengenlehre; Math. Ann. **86** (1922), 230—237. *Th. Skolem*, Einige Bemerkungen zur axiomat. Begründung der Mengenlehre; Mathematikerkongressen i Helsingfors (Hels. 1923), 217—232. — Von den intuitionistischen Einwänden ist hier nicht die Rede.

[3]) *K. Grelling*, Die Axiome der Arithmetik (Inauguraldiss.), Göttingen 1910, S. 21.

bar wesentlich einschränkender Natur zu substituieren [1]), auf dem sich weiterhin die ganze Äquivalenztheorie *Zermelos* neu aufbauen ließ [2]).

Jm übrigen wurde zwar u. a. die Unabhängigkeit des Axiomensystems in den in der zweiten und vierten Fußnote genannten Arbeiten erörtert und im wesentlichen geklärt; aber die Fortsetzung der Hauptaufgabe, aus den Axiomen die Grundzüge der *gesamten* Mengenlehre herzuleiten, ist bisher unterblieben. Man ist also, während die axiomatische Äquivalenztheorie allein mit den Grundbegriffen „Menge", „gleich sein" und „Element sein" auskommt, in der Theorie der geordneten und wohlgeordneten Mengen weiterhin auf die Hinzunahme einer nicht definierten, asymmetrischen transitiven Relation (Ordnungsrelation) angewiesen. Dies ist nicht nur im eigentlich axiomatischen Sinn unerfreulich, sondern vor allem eine wesentliche Erschwerung der metamathematischen, auf einen Widerspruchslosigkeitsbeweis zielenden Betrachtungen. Ansätze für eine Zurückführung der Ordnung auf die ursprünglichen Grundbegriffe liegen allerdings vor [3]), nicht aber (wie bei der Äquivalenz) eine tatsächliche Entwicklung.

Die Schwierigkeiten hierbei dürften in drei Richtungen gelegen haben [4]). Zunächst ist die *Ordnungsdefinition Hausdorffs* überhaupt für axiomatische Zwecke nicht bestimmt und auch weniger geeignet, die von *Hessenberg* aber durch die große Zahl der in sie eingehenden Kriterien nur mit großer Umständlichkeit und (hinsichtlich des definiten Charakters) Vorsicht verwendbar. Hier stellt die Herrn *Kuratowski* zu verdankende Vereinfachung [5]) einen wesentlichen Fortschritt dar; sie wird nachstehend zugrunde gelegt. Immerhin wird auch dann noch — angesichts der gegenüber der Äquivalenztheorie weit verwickelteren Verhältnisse — auf der Basis *Zermelos* eine objektive Auswahl der zulässigen „definiten" Aussonderungsprozesse schwer möglich, vielmehr subjektivem Ermessen Tür und Tor geöffnet; dem hilft die neue willkürfreie Fassung des *Aussonderungsaxioms* ab, die demgemäß als die *entscheidende methodische Grundlage des folgenden Aufsatzes* zu betrachten ist. Schließlich schien *Zermelos* Axiomensystem den *Umfang der Mengenlehre* allzusehr einzuschränken, um eine Theorie der Ordnung zu ermögli-

---

[1]) *A. Fraenkel*, Über den Begriff „definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms; Sitzungsberichte der Preuß. Akademie der Wissenschaften Berlin, Physik.-Math. Kl., 1922, S. 253 bis 257. Vgl. auch *Einleitung in die Mengenlehre*, 2. Aufl. (Berlin 1923), S. 197 ff.

[2]) *Derselbe*, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre; Math. Zeitschr. **22** (1925), 250—273. *Nachstehend zitiert mit* I.

[3]) Einerseits von *Hessenberg* und *Zermelo* (vgl. auch *G. Combébiac* in L'Enseignement Mathématique, 8 [1906], 201—203), andererseits von Herrn *Hausdorff* (Grundzüge der Mengenlehre [Leipzig 1914], S. 71); für die Wohlordnung vgl. auch Herrn *Brodéns* Definition in Lunds Universitets Årsskrift, N. F., Avd. 2, Bd. 20, Nr. 1 (1924). Die *Hessenberg-Zermelo*schen Ideen findet man seit 1906 verschiedentlich entwickelt, am bequemsten zugänglich bei *Hartogs*, Math. Ann. **76** (1915), 443, wozu jedoch das Zitat der übernächsten Fußnote zu vergleichen ist. Die Definitionen von *Hessenberg* und *Hausdorff* treten nachstehend in § 2 auf (Nr. 21 bezw. 27 ff.), wobei auch (Nr. 22) auf eine wünschenswerte Vervollständigung der ersteren hingewiesen wird, die freilich eine weitere Komplizierung dieser Definition bedingt; vgl. meine Note in den Fundamenta Mathematicae, 7 (1925), 308—310.

[4]) Zu diesem Absatz vgl. meinen in den Sitzungsberichten der Berliner Mathem. Gesellschaft, 24 (1925), 29—37 erschienenen Vortrag.

[5]) Fundamenta Mathematicae, 2 (1920), 161—171.

chen, sodaß für diesen Zweck die Hinzufügung eines ferneren, unerfreulich weitgehenden Axioms vorgeschlagen wurde [1]); das wird sich im Folgenden als unnötig erweisen, vielmehr gestattet *die Verschärfung des Aussonderungsaxioms, die allgemeine Theorie der geordneten Mengen (einschließlich der abgezählten Mengen) im Rahmen Zermelos ohne ein neues Axiom durchzuführen.* Dies gelingt namentlich mittels des Satzes von Nr. 7 in § 1 (vgl. die Bemerkungen in Nr. 8). Weitere auf *spezielle* Mengen bezügliche Fragen, namentlich die der axiomatischen Bedürfnisse der transfiniten Induktion, sind erst in der Theorie der wohlgeordneten Mengen zu behandeln.

Zusammen mit dem früheren Aufsatz (I) und einem später folgenden, die Theorie der Wohlordnung darstellenden Artikel zeigt die nachstehende Entwicklung, daß *das neue, zunächst vielfach als zu eng angesehene Aussonderungsaxiom nicht nur scharf, sondern auch weit genug ist, um das Gesamtgebiet der allgemeinen Mengenlehre zu beherrschen.* Für diese ist also hiermit vom rein mathematischen Standpunkt aus der wünschenswerte Abschluß der Axiomatik der Mengenlehre erreicht. Deren Kritik oder Stützung im metamathematischen Sinn ist freilich hiervon völlig unabhängig; indes ist auch hierfür die neue Form des Aussonderungsaxioms von wesentlicher Bedeutung, da erst diese, sich lediglich auf die Grundbegriffe der Axiomatik stützende Fassung diejenige Formalisierung gestattet, wie sie Vorbedingung für einen Beweis der Widerspruchsfreiheit ist. Andererseits ist freilich zu den bisherigen Einwänden der Intuitionisten neuerdings ein weiteres, speziell für die Mengenlehre beunruhigendes Argument getreten [2]), für dessen Aufklärung man zunächst den Fortgang der Arbeiten Herrn *Hilberts* und seiner Schüler abwarten wird.

Die Kenntnis anderer Arbeiten wird im folgenden nicht vorausgesetzt. Die Theorie der geordneten Mengen wird im wesentlichen nur so weit fortgeführt, als es die Bedürfnisse der Theorie der *Wohlordnung* wünschenswert machen. Das Axiomensystem und die nachstehend wesentlich benutzten Ergebnisse aus I werden in § 1 kurz zusammengestellt. Ein Verzeichnis der verwendeten Begriffe und Bezeichnungen (meist durch Sperrdruck hervorgehoben) befindet sich am Schluß des Aufsatzes.

§ 1. Das Axiomensystem. Hilfsmittel aus der Äquivalenztheorie.

1. Wir betrachten Objekte, die Mengen heißen und deren Existenz lediglich aus den Axiomen zu erschließen ist. Zwischen je zwei Mengen A und B können

---

[1]) Daß ein solches zur Sicherung *spezieller* Mengen erforderlich ist, hatte ich 1922 (Zitat der zweiten Fußnote) bemerkt. Das dort für spezielle Zwecke in Vorschlag gebrachte „Ersetzungsaxiom“ (vgl. nachstehend Nr. 8) hat Herr *v. Neumann*, in Rücksicht auf die Bedürfnisse der Ordnungstheorie, in die *allgemeine* Theorie eingeführt: Acta litterarum ac scient. r. univ. Hung. Francisco-Josephinae, **1** (1923), 199—208. Derselbe Umstand hat, neben anderen Gründen, inzwischen den gleichen Autor veranlaßt, eine ganz neuartige Axiomatik der Mengenlehre auszuarbeiten, die in diesem Journal **154** (1925), 219—240 erschien und implizit das Ersetzungsaxiom enthält.

[2]) Zuerst hervorgehoben von *Th. Skolem* (a. a. O.); vgl. auch den letzten Teil der zu Ende der letzten Fußnote genannten Arbeit *J. v. Neumanns*, sowie *A. Fraenkel*, Die neueren Ideen zur Grundlegung der Analysis u. Mengenlehre; Jahresber. d. D. Math.-Verein., **33** (1924), 97—103.

Grundbeziehungen der Form $A = B$ und $A \varepsilon B$ nebst ihren Negationen $A \neq B$, $A \notin B$ bestehen. Die (durch Axiom I weiter präzisierte) Beziehung $=$ (gleich; Gegensatz: verschieden) hat die üblichen Eigenschaften. $A \varepsilon B$ wird gelesen: A ist Element von B, B enthält A als Element, usw. Mengen werden meist mit (großen oder kleinen) lateinischen Buchstaben bezeichnet.

Eine Menge M, deren Elemente sämtlich auch Elemente einer Menge N sind, heißt eine Teilmenge von M (in Zeichen: $M \subseteq N$), im Fall $M \neq N$ speziell auch eine echte Teilmenge von N. Aus $M \subseteq N$, $N \subseteq P$ folgt also stets $M \subseteq P$. Enthalten die Mengen M und N kein gemeinsames Element, so heißen M und N elementefremd.

Für eine ausführliche Erläuterung dieser Bemerkungen sowie der nachstehenden Axiome, von denen sich nur das erste, zweite und fünfte wesentlich von den entsprechenden Axiomen *Zermelos* (siehe I) unterscheiden, werde auf I verwiesen, sowie namentlich auf die eingehende Entwicklung und Prüfung in meiner 1926 bei Teubner erscheinenden Schrift „10 Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre"; ebenso für die Gründe, aus denen die ersten zwei Abweichungen wünschenswert, die dritte (vgl. auch Einleitung) notwendig erscheinen. Die Änderungen stellen übrigens nur Einschränkungen bezw. Verschärfungen der ursprünglichen Axiome dar.

Axiom I. Ist gleichzeitig $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ (d. h. gehört jedes Element von M zu N und umgekehrt), so ist $M = N$. (Axiom der Bestimmtheit.)

Eine Menge M ist also bestimmt durch ihre sämtlichen Elemente $A, B, C, \ldots$. Man schreibt daher auch: $M = \{A, B, C, \ldots\}$.

Axiom II. Zu je zwei verschiedenen Mengen A und B existiert ihr Paar $\{A, B\}$, das A und B, aber keine weitere Menge als Elemente enthält. (Axiom der Paarung.)

Axiom III. Zu jeder Menge M existiert ihre Potenzmenge $\mathfrak{U}M$, die sämtliche Teilmengen von M und nur sie als Elemente enthält. (Axiom der Potenzmenge.)

Axiom IV. Zu jeder Menge M existiert ihre Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}M$, die alle Elemente *der Elemente* von M und nur sie zu Elementen besitzt. (Axiom der Vereinigung.)

Ist $M = \{A, B, C, \ldots\}$, so schreibt man auch $\mathfrak{S}M = A + B + C + \cdots$ und bezeichnet die Menge $\mathfrak{S}M$ als Summe der Elemente von M, ihre Bildung als Addition.

Dem nächsten Axiom, das die (in Axiom III eingehenden) Teilmengen einer gegebenen Menge zu sichern hat, ist die Erklärung eines Funktionsbegriffs vorauszuschicken:

Definition 1. a) Bezeichnet x eine unbestimmte oder variable Menge, so werden $\mathfrak{U}x$ und $\mathfrak{S}x$, ebenso wie jede konstante Menge und x selbst, als Funktionen von x bezeichnet. Ferner heißt das durch zwei Funktionen von x bestimmte Paar wie auch jede Funktion einer Funktion von x wiederum eine Funktion von x.

b) Ist M eine Menge, sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gegebene Funktionen von x, und

enthält M' all die Elemente y von M und nur sie, für die die Beziehung $\varphi(y)\,\varepsilon\,\psi(y)$ gilt, so heißt M' die durch $\varphi\,\varepsilon\,\psi$ bestimmte Aussonderungsmenge von M, in Zeichen: $M' = M_{\varphi(y)\,\varepsilon\,\psi(y)}$. Entsprechend, wenn statt ε eine andere der Grundbeziehungen ($\notin$, $=$, $\neq$) steht. M' hängt natürlich von der Hilfsvariabeln y nicht ab (vgl. die Rolle der Integrationsvariabeln), ist also konstant. Ist aber M eine Funktion einer Unbestimmten x bezw. geht in die Funktionen φ und ψ (abgesehen von der Hilfsvariabeln y) die Unbestimmte x ein, so heißt die (im allgemeinen von x abhängige) Aussonderungsmenge M' wiederum eine Funktion von x.

Zu dieser Definition, die ersichtlich ein induktives Verfahren enthält, sei bemerkt, daß es sich der Sache nach stets um Funktionen einer *einzigen* Variabeln handelt. In einem Fall wie dem am Schluß der Definition angeführten z. B. ist beim Aussonderungsprozeß y als veränderlich, x als konstant anzusehen (vgl. Parameter unter einem Integralzeichen). Da sich aber in solchen Fällen die Schreibweise von Funktionen zweier Variabeln als praktisch empfiehlt, so wird die (der Integrationsvariabeln entsprechende) *beim Aussonderungsprozeß auftretende Hilfsvariable*, die die Elemente der Ausgangsmenge zu durchlaufen hat, *stets durch fetten Druck als solche gekennzeichnet.*

Axiom V. Zu jeder Menge M und je zwei Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ existiert die Aussonderungsmenge $M_{\varphi(y)\,\varepsilon\,\psi(y)}$, die all diejenigen Elemente y von M und nur sie enthält, für welche die Beziehung $\varphi(y)\,\varepsilon\,\psi(y)$ gilt. Desgleichen, falls ε durch eine der drei anderen Grundbeziehungen ersetzt wird. (Axiom der Aussonderung.)

Axiom VI. Ist M eine Menge, deren Elemente untereinander paarweise elementefremd sind und sämtlich mindestens je ein Element enthalten, so existiert mindestens eine Menge — eine Auswahlmenge von M —, die mit jedem Element von M ein einziges Element gemeinsam hat und keine weiteren Elemente enthält. (Axiom der Auswahl.)

Offenbar ist jede Aussonderungsmenge von M eine Teilmenge von M, jede Auswahlmenge von M eine Teilmenge von $\mathfrak{S}M$.

2. Das Axiomensystem der *allgemeinen Mengenlehre* ist hiermit abgeschlossen. Die vorstehenden Axiome — mit Ausnahme des ersten, das überhaupt keine Existenzforderung enthält — sind nur relative Existenzaxiome: unter der Voraussetzung, daß gewisse Mengen existieren, sichern sie die Existenz anderer. Die Existenz von Mengen überhaupt wird durch sie nicht garantiert. Um spezielle Mengenlehre zu treiben, bedarf man absoluter Existenzaxiome und zwar eines solchen, das die Existenz unendlicher Mengen sichert. Da eine so weitgehende Forderung für die nächsten beiden Paragraphen nicht notwendig ist, begnügen wir uns vorläufig (vgl. Beginn des § 4) mit dem einfachsten absoluten Existenzaxiom:

Axiom VII 1. Es existiert mindestens eine Menge.

Schließlich sind noch die wichtigsten im folgenden benutzten Sätze und Begriffe anzuführen, die in den §§ 2 und 3 von I aus dem vorstehenden Axiomensystem hergeleitet worden sind. Die Nrn. 4, 5, 9 und 10, 2. Absatz sind, von der Begründung mittels Axiom V abgesehen, aus Z. entnommen.

3. Es existiert eine einzige Menge, die überhaupt kein Element enthält, die Nullmenge 0; sie ist Teilmenge *jeder* Menge. Zu jeder Menge A existiert die Menge $\{A\}$, die A als einziges Element enthält; es ist $\mathfrak{S}\{A\} = A$. Jede Teilmenge A' von A bestimmt die Komplementärmenge $A - A' = A_{x \notin A'} \subseteq A$. (I, Nrn. 1—3.)

4. Jede Menge $M = \{A, B, \ldots\}$ bestimmt den zu ihr gehörigen Durchschnitt (oder Durchschnitt ihrer Elemente) $\mathfrak{D}M = [A, B, \ldots]$, der die allen Elementen von M gemeinsamen Elemente und nur sie enthält. Die Addition der Mengen (Axiom IV) ist assoziativ und kommutativ. (I, Nrn. 4, 6.)

5. Jede Menge $M = \{A, B, \ldots\}$ von paarweise elementefremden Elementen bestimmt eine Menge $\mathfrak{P}M = A \cdot B \cdots$, die all diejenigen Teilmengen von $\mathfrak{S}M$ und nur sie als Elemente enthält, die mit jedem Element von M je ein einziges Element gemeinsam haben. $\mathfrak{P}M$ heißt die Verbindungsmenge von M oder das Produkt der Mengen $A, B, \ldots$. Das Produkt ist dann und (wegen Axiom VI) nur dann $= 0$, wenn $0 \varepsilon M$. (I, Nr. 8.)

6. Sind zwei Funktionen zweier Variabeln [1]) $\varphi(x, u)$ und $\psi(x, u)$ gegeben, so bestimmt jede Menge M eine Teilmenge $M_1 \subseteq M$ (bzw. $M_2 \subseteq M$), die all die Elemente z von M und nur sie enthält, welche *für jedes Element* y (bzw. *für irgend ein Element* y) der gegebenen — konstanten oder auch als Funktion von z dargestellten [2]) — Menge N die Beziehung $\varphi(y, z) \varepsilon \psi(y, z)$ erfüllen. Ebenso, wenn ε durch eine andere der Grundbeziehungen ersetzt wird. (I, Nrn. 10/11.)

7. Ist $\varphi(x)$ eine Funktion, so entsteht aus einer Menge M, falls jedes Element y von M durch die Menge $\varphi(y)$ ersetzt wird, wiederum eine Menge N, vorausgesetzt, daß eine Menge $\bar{N}$ existiert, der all jene Mengen $\varphi(y)$ als Elemente angehören.

Die in dem vorigen und diesem Satz gekennzeichneten Mengen M_1, M_2, N sind Funktionen der Unbestimmten w, falls in die gegebenen Bestimmungsstücke neben konstanten Mengen auch Funktionen von w eingehen. (I, Nr. 12.)

8. Die letzten beiden Sätze sind methodisch besonders wichtige Hilfsmittel; namentlich der letzte Satz wird im folgenden sehr häufig verwendet. Läßt man in ihm den Schluß (vorausgesetzt ...) fort, so erhält man *eine von dem Axiomensystem unabhängige Aussage* (Ersetzungsaxiom), die zwecks Sicherung spezieller (sehr umfassender) Mengen als neues Axiom aufgestellt werden muß [3]). Dagegen scheint es unnötig, dieses neue Axiom auch der allgemeinen Theorie der Ordnung voranzustellen; man kommt nämlich im folgenden — übrigens auch für andersartige Zwecke [4]) — mit der Behauptung von Nr. 7 aus, die sich aus der verschärften Fassung des Aussonderungsaxioms unschwer ergibt.

9. **Definition 2.** a) Zwei elementefremde Mengen M und N heißen äquivalent ($M \sim N$), wenn ihr Produkt $M \,.\, N$ mindestens eine Teilmenge Φ von der Art besitzt, daß *jedes* Element von $M + N$ in einem *einzigen* Element $\{m, n\}$

---

[1]) Vgl. Definition 1 b) und die Bemerkung dazu.

[2]) Diese Eventualität, die in I — als für die dortigen Anwendungen unnötig — nicht ausdrücklich zugelassen wurde, macht keine Abänderung des dortigen Beweises erforderlich.

[3]) Vgl. Fußnote 1 auf S. 131.

[4]) Vgl. die Marburger Inauguraldissertation des Herrn *J. Merzbach*, Kapitel IV (Darmstadt 1925).

von Φ als Element auftritt. Eine solche Menge Φ wird eine Abbildung zwischen M und N genannt; je zwei Elemente m, n des gleichen Elementes von Φ heißen einander (durch Φ) zugeordnet, Bilder von einander usw.

b) Zwei beliebige Mengen M und N heißen äquivalent, wenn es eine Menge R gibt, die sowohl zu M wie zu N elementefremd und beiden Mengen nach a) äquivalent ist. An die Stelle einer Abbildung tritt hier ein Paar simultaner Abbildungen usw. (I, Def. 1/2 des § 3.)

Zu je zwei elementefremden Mengen existiert die Menge aller Abbildungen zwischen ihnen; sie ist, wenn eine der Mengen oder beide Funktionen von x sind, selbst eine Funktion von x. Sie ist $\neq 0$ oder $= 0$, je nachdem die gegebenen Mengen äquivalent sind oder nicht. Die Äquivalenz ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation. Die Nullmenge ist nur sich selbst, eine Menge mit einem einzigen Element nur einer ebensolchen äquivalent. (I, Nrn. 13, 15, 17.)

10. Zu einer gegebenen Abbildung (bzw. Abbildungspaar) zwischen zwei äquivalenten Mengen M und N gibt es eine Funktion $\chi(x)$, die jedem Element m von M sein Bild n in N in der Form $n = \chi(m)$ (bei gleichzeitigem $m = \chi(n)$) zuordnet, und eine Funktion $\tau(x)$, die jeder Teilmenge M' von M die entsprechende (die Bilder der Elemente von M' enthaltende) Teilmenge N' von N in der Form $N' = \tau(M')$ zuordnet. (I, Nrn. 14, 18, 19.)

Eine Menge M, die einer echten Teilmenge von sich selbst äquivalent ist, ist jeder Menge äquivalent, die aus M durch Addition oder Subtraktion (Nr. 3) einer Menge mit einem einzigen Element hervorgeht. (Z., Nr. 26; unmittelbar in I zu übertragen.)

§ 2. Die geordneten Mengen.

11. Wir definieren mit *Kuratowski* (vgl. Einleitung) [1]:

Grunddefinition. Eine Menge M, deren Elemente Teilmengen der Menge M sind, heißt eine Ordnung von M, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

Grundbedingung I. Sind M' und M'' Elemente von M, so ist entweder M' Teilmenge von M'' oder M'' Teilmenge von M'.

Grundbedingung II. Eine Teilmenge von $\mathfrak{U}M$ (Axiom III), deren Elemente der Grundbedingung I genügen, ist, falls sie M als Teilmenge umfaßt, notwendig gleich M.

Existiert eine Ordnung M von M, so sagt man, M werde durch M geordnet.

Das Wesen dieser Definition erhellt aus folgendem: Eine Menge von der Eigenschaft, daß von je zweien ihrer Elemente eines Teilmenge der anderen ist, mag als eine monotone Menge bezeichnet werden. Dann besagt die Grundbed. II, daß eine monotone Menge M von Teilmengen der Menge M dann und nur dann eine Ordnung von M darstellt, wenn M *so umfassend als möglich* ist („saturé par rapport

[1] Bei *Kuratowski* wird aus äußeren Gründen die Nullmenge (unter den Elementen von M) ausgeschlossen, was ohne Bedeutung ist.

à ses propriétés") [1]), d. h. falls die Hinzufügung weiterer Elemente unverträglich ist mit der Eigenschaft von M, eine monotone Teilmenge von $\mathfrak{U}M$ zu sein. — Im allgemeinen gibt es natürlich hiernach mehrere Ordnungen derselben Menge.

12. Jede Ordnung M von M enthält die Elemente 0 und M. Das ist eine Folge von II, da jedes beliebige Element von $\mathfrak{U}M$ stets 0 als Teilmenge besitzt und selbst eine Teilmenge von M ist.

Hiernach ist stets $\mathfrak{S}\mathsf{M} = M$.

$\{0\} = \mathfrak{U}0$ ist die einzige Ordnung der Nullmenge, $\{\{a\}, 0\} = \mathfrak{U}\{a\}$ die einzige Ordnung der Menge $\{a\}$. Auch eine Menge von zwei Elementen a und b kann stets, und zwar auf zwei Arten, geordnet werden: durch die Ordnungen $\{\{a, b\}, \{a\}, 0\}$ und $\{\{a, b\}, \{b\}, 0\}$.

13. Für den nächsten Beweis bedürfen wir des folgenden, nachstehend noch öfter verwendeten Hilfssatzes:

Zu jeder Menge M existiert die Menge aller Paare von Elementen aus M, und allgemeiner: Zu jeder Menge N existiert die Menge N' derjenigen Elemente von N, die einer gegebenen Menge A äquivalent sind. N' ist, wenn A konstant ist, eine Funktion von N.

Beweis: Nach Nr. 9 existiert die Menge $\varphi(y)$ aller Abbildungen zwischen A und einer unbestimmten Menge y und stellt eine Funktion von y dar, die dann und nur dann $\neq 0$ ist, wenn $A \sim y$. Daher ist nach Axiom V $N' = N_{\varphi(y) \neq 0}$; nach Definition 1 b) ist N' eine Funktion von N. Die erste Behauptung des Hilfssatzes erhält man für $N = \mathfrak{U}M$, $A = \{0, \{0\}\}$.

14. *Zu jeder Menge M existiert die Menge aller möglichen Ordnungen von M.*

Zunächst existiert, wenn gemäß der vorigen Nr. $\pi(x)$ die Menge aller Paare von Elementen aus x bezeichnet, nach Nr. 6 die Menge Ξ^* derjenigen Teilmengen z von $\mathfrak{U}M$ (d. h. derjenigen Mengen z von Teilmengen von M), für die zu *jedem* Element y von $\pi(z)$ gilt: $\mathfrak{S}y \varepsilon y$. Man hat hierzu, da Ξ^* eine Teilmenge von $\mathfrak{U}\mathfrak{U}M$ darstellt, in Nr. 6 M durch $\mathfrak{U}\mathfrak{U}M$, $\varphi(y, z)$ durch $\mathfrak{S}y$, $\psi(y, z)$ durch y, N durch $\pi(z)$ und somit M_1 durch Ξ^* zu ersetzen. z sei ein beliebiges Element von Ξ^*, also eine Teilmenge von $\mathfrak{U}M$, und $y = \{y_1, y_2\}$ ein beliebiges Paar zweier Elemente von z, also $y \varepsilon \pi(z)$; dann gilt offenbar dann und nur dann eine der Beziehungen $y_1 \neq y_2$ und $y_2 \neq y_1$, wenn $\mathfrak{S}y = y_1 + y_2$ Element von y ist. Nach Grundbed. I und Nr. 11 ist also Ξ^* die Menge aller *monotonen* Mengen von Teilmengen von M. Ξ^* ist übrigens stets $\neq 0$, da z. B. die Elemente $\{0\}$, $\{M\}$, $\{0, M\}$ darin vorkommen. Um unter den Elementen von Ξ^* weiter diejenigen auszusondern, die auch noch der Grundbed. II genügen, benutzen wir wiederum Nr. 6. Hiernach existiert die Menge Ξ derjenigen Elemente z von Ξ^*, für die zu jedem Element y von $\Xi^* - \{z\}$ (Nr. 3) gilt: $z \notin \mathfrak{U}y$, m. a. W. die Menge Ξ derjenigen monotonen Teilmengen z von $\mathfrak{U}M$, zu denen keine andere ebensolche, z als echte Teilmenge umfassende Menge existiert. Nach der Grunddefinition ist jedes Element von Ξ eine Ordnung von M und umgekehrt.

---

[1]) *Janiszewski*, Thèse, Paris 1911. Vgl. *Hilberts* Axiom der Vollständigkeit in Arithmetik und Geometrie.

M ist also ordnungsfähig oder nicht, je nachdem $\Xi \neq 0$ oder $= 0$ ist. Die Tatsache, daß *stets* ersteres der Fall ist, soll — als spezielle Folge des Wohlordnungssatzes — erst in einem weiteren Aufsatz behandelt werden; nachstehend wird von ihr kein Gebrauch gemacht. Auch auf die Frage, welche Bedeutung die Postulierung jener Tatsache *an Stelle* des Auswahlaxioms besitzen würde, d. h. ob sie dem Auswahlaxiom gleichwertig ist oder nicht und in welchem Ausmaße im zweiten Falle ihr Eintreten statt des Auswahlaxioms die Mengenlehre ermöglichen würde, kann erst dann eingegangen werden. Ξ ist nach Nr. 7 und Def. 1 eine Funktion von M.

15. *Ist* M *eine Ordnung der Menge* M *und* M' *eine beliebige Teilmenge von* M, *so sind die Vereinigungsmenge* $\mathfrak{S}\mathsf{M}'$ (Axiom IV) *und der Durchschnitt* $\mathfrak{D}\mathsf{M}'$ (Nr. 4) *Elemente von* M.

Zu zeigen ist, daß jedes Element μ von M zusammen mit $\mathfrak{S}\mathsf{M}'$ bezw. $\mathfrak{D}\mathsf{M}'$ der Grundbed. I genügt; denn ist das der Fall, so sind $\mathsf{M} + \{\mathfrak{S}\mathsf{M}'\}$ und $\mathsf{M} + \{\mathfrak{D}\mathsf{M}'\}$ monotone Mengen von Teilmengen von M, die nach Grundbed. II mit M zusammenfallen müssen.

Beweis für $\mathfrak{S}\mathsf{M}'$: Kommt jedes Element der Teilmenge μ von M in *mindestens einem* Element von M' vor, so ist $\mu \notin \mathfrak{S}\mathsf{M}'$. Enthält aber μ ein Element, das in *keinem* Element von M' vorkommt, so ist nach Grundbedingung I (angewandt auf μ und die Elemente von M') jedes einzelne Element von M' Teilmenge von μ, also auch $\mathfrak{S}\mathsf{M}' \notin \mu$.

Beweis für $\mathfrak{D}\mathsf{M}'$: Kommt jedes Element der Teilmenge μ von M *gleichzeitig in allen* Elementen von M' vor, so auch in $\mathfrak{D}\mathsf{M}'$, also $\mu \notin \mathfrak{D}\mathsf{M}'$. Enthält aber μ ein Element, das in *mindestens einem* Element μ' von M' *nicht* als Element auftritt, so ist nach Grundbed. I $\mu' \notin \mu$, also umsomehr $\mathfrak{D}\mathsf{M}' \notin \mu$.

16. *Sind* m *und* m' *beliebige verschiedene Elemente der Menge* M, *so gibt es in jeder Ordnung* M *von* M *mindestens ein Element, das ein einziges der beiden Elemente* m *und* m' *als Element enthält.*

Beweis [1]): Unter der Annahme, daß jedes Element von M, das m enthält, auch m' enthält, ist zu zeigen, daß es mindestens ein Element von M gibt, das m', nicht aber m als Element enthält. Zum Beweis konstruieren wir ein *spezielles* derartiges Element μ_m von M, das sich vermöge seiner Definition als Funktion von m erweisen wird.

Es sei $\mathsf{M}' = \mathsf{M}_{m\varepsilon y} \notin \mathsf{M}$ die Menge derjenigen Elemente von M, die m als Element enthalten; nach Annahme ist dann auch m' Element jedes Elementes von M'. Daher sind m und m' Elemente des Durchschnitts $\mathfrak{D}\mathsf{M}'$. Ferner ist nach der vorigen Nr. $\mathfrak{D}\mathsf{M}' \varepsilon \mathsf{M}$. Die Menge $\mathfrak{D}\mathsf{M}' - \{m\} = \mu_m$ enthält dann m', nicht aber m als Element und ist — übrigens unabhängig von der zu Beginn gemachten Annahme — eine Funktion von m nach Def. 1 (bei gegebener Ordnung M); wir zeigen, daß $\mu_m \varepsilon \mathsf{M}$.

Ist μ ein beliebiges Element von M, so ist m entweder Element von μ oder nicht. Im ersten Fall ist (nach der Definition von M') $\mathfrak{D}\mathsf{M}' \notin \mu$ und um so mehr

[1]) Vgl. den Beweis von *Kuratowski*, a. a. O.

$\mu_m \not\in \mu$. Im zweiten Fall ist μ nach Grundbed. I Teilmenge eines jeden Elements von M, das m enthält, also auch Teilmenge von $\mathfrak{D}\mathsf{M}'$. Da m in μ nicht vorkommt, ist auch $\mu \not\in \mu_m$. Da μ_m somit mit den Elementen von M die Grundbed. I erfüllt, ist nach Grundbed. II in der Tat $\mu_m \varepsilon \mathsf{M}$.

Es sei noch hervorgehoben, daß μ_m, in dessen Definition nur M und m eingehen, bei gegebenem m eine Funktion der Ordnung M ist.

17. **Definition 3.** Ist M eine Ordnung der Menge M und existiert zu zwei gegebenen Elementen m und m' von M ein Element von M, das m', aber nicht m als Element enthält, so setzen wir: $m \overset{\mathsf{M}}{<} m'$ oder gleichbedeutend $m' \overset{\mathsf{M}}{>} m$ (m vor m' [gemäß der Ordnung M], m' nach m usw.). Wo kein Zweifel möglich ist, wird auch bloß $m < m'$, $m' > m$ geschrieben.

Ihre Berechtigung erhält diese Definition durch nachstehende Folgerung aus den letzten Nummern:

Nach Definition 3 stellt M zwischen den Elementen von M eine einfache Ordnung im üblichen Sinn her, d. h. $<$ ist (ebenso wie $>$) eine zwischen je zwei Elementen von M bestehende asymmetrische transitive Relation.

In der Tat zeigt Nr. 16, daß zwischen je zwei verschiedenen Elementen m und m' von M vermöge M mindestens eine der Beziehungen $m < m'$, $m' < m$ gilt; aber auch *nur* eine (Asymmetrie), da die Elemente von M der Grundbed. I genügen. Ist schließlich $m \overset{\mathsf{M}}{<} m'$, $m' \overset{\mathsf{M}}{<} m''$, d. h. enthält M zwei Elemente μ_1, μ_2 von den Eigenschaften

$$m \not\in \mu_1,\ m' \varepsilon \mu_1,\ m' \not\in \mu_2,\ m'' \varepsilon \mu_2,$$

so kann hiernach μ_1 nicht Teilmenge von μ_2 sein; nach Grundbed. I ist also $\mu_2 \not\in \mu_1$, also z. B. $m'' \varepsilon \mu_1$, $m \not\in \mu_1$, d. h. $m \overset{\mathsf{M}}{<} m''$, w. z. b. w.

Natürlich könnte unter den Voraussetzungen der Def. 3 ebensogut definiert werden: $m' \overset{\mathsf{M}}{<} m$. Diese unvermeidbare Willkür hat einen rein formalen Charakter.

Hervorgehoben sei noch, daß in vielen Fällen schon Teilmengen von M — also Mengen, die der Grundbed. II nicht genügen — geeignet wären, M in diesem Sinn zu ordnen. Will man aber eine in allen Fällen wirksame und eindeutig bestimmte ordnende Menge erhalten, so bedarf man gerade der Grundbed. II, deren Folge es dann ist, daß z. B. 0 und M stets Elemente von M sind.

18. Durch die Ordnung M der Menge M ist diese nach Nr. 12 bestimmt als $M = \mathfrak{S}\mathsf{M}$. Die Einführung eines neuen Begriffs „geordnete Menge“ ist daher nicht erforderlich, nicht einmal die von Paaren der Form $\{M, \mathsf{M}\}$. Indes wird bei konsequenter Vermeidung des Adjektivs (nicht Partizips) „geordnet“ die Ausdrucksweise vielfach ungemein schleppend. Wir wollen daher lediglich zur Vereinfachung des Ausdrucks neben der Menge M und ihrer Ordnung M auch von der geordneten Menge $\mathfrak{M}$ sprechen; in bezug auf das Enthalten von Elementen, auf Elementefremdheit, Bildung des Durchschnitts usw. entspricht sie der ungeordneten Menge ($m \varepsilon \mathfrak{M}$ gleichbedeutend mit $m \varepsilon M$), in bezug auf die Ordnung und einschlägige Aussagen aber der Ordnung M, so daß auch $m \overset{\mathfrak{M}}{<} m'$ gleichbedeutend mit $m \overset{\mathsf{M}}{<} m'$ geschrieben wird. $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$ drückt die Gleichheit der betreffenden

Ordnungen aus, aus der die Gleichheit der ungeordneten Mengen M_1 und M_2 folgt. — Von der Verwendung geordneter Mengen als *Elemente* von Mengen kann (vermöge der z. B. in den Nrn. 37 ff. verwendeten Umschreibung) abgesehen werden.

Eine Ordnung der Menge M wird stets durch einen zugehörigen griechischen Buchstaben (M, erforderlichenfalls etwa $\overline{\mathsf{M}}$ usw.), die zugehörige geordnete Menge durch den entsprechenden deutschen ($\mathfrak{M}$) bezeichnet (ohne Sonderfestsetzung in jedem einzelnen Fall).

Die Nullmenge und jede Menge mit einem einzigen Element können bei Bedarf auch als geordnete Mengen angesehen werden, da zu ihnen nach Nr. 12 eine und nur eine Ordnung gehört.

Die in der Theorie der geordneten Mengen üblichen Definitionen und die an sie anknüpfenden Sätze lassen sich nach Def. 3 ohne Schwierigkeit übertragen. Für zwei in der Theorie der Wohlordnung besonders wichtige Begriffe sind die Übertragungen folgende:

m heißt das erste Element der geordneten Menge $\mathfrak{M}$, wenn die Ordnung M nur ein einziges Element — nämlich die Menge M selbst — enthält, in dem m vorkommt.

m' heißt der unmittelbare Nachfolger des Elementes m in der geordneten Menge $\mathfrak{M}$, wenn die Ordnung M ein Element μ enthält, in dem m', nicht aber m vorkommt, während jedes andere Element $\overline{\mu}$ von M entweder beide Elemente m und m' oder keines von ihnen als Element enthält (je nachdem $\overline{\mu}$ die Teilmenge μ umfaßt oder Teilmenge von μ ist).

19. Ist M eine Ordnung von M, so gibt es eine weitere Ordnung M^* von M, die zu M inverse Ordnung, derart, daß nach Def. 3 für je zwei Elemente m, m' von M aus $m \overset{\mathsf{M}}{<} m'$ stets $m' \overset{\mathsf{M}^*}{<} m$ folgt und umgekehrt.

Ersetzt man nämlich jedes Element μ von M durch $\varphi(\mu) = M - \mu$, so entsteht nach Nr. 7 eine Teilmenge M^* von $\mathfrak{U}M$, die (wie leicht zu erkennen) ebenso wie M beiden Grundbedingungen genügt, also eine Ordnung von M darstellt. Die Anwendung der Def. 3 auf $\mu \varepsilon \mathsf{M}$ und $(M - \mu) \varepsilon \mathsf{M}^*$ ergibt die obige Kennzeichnung von M^*.

20. Die in Nr. 16 zu einem beliebigen Element m der geordneten Menge $\mathfrak{M}$ definierte Menge $\mu_m = \mathfrak{D}\mathsf{M}_{m \varepsilon y} - \{m\}$ heißt die zu $m \varepsilon \mathfrak{M}$ gehörige (ungeordnete) Endstrecke der geordneten Menge $\mathfrak{M}$.

Sie ist nach Nr. 16 Element von M und (bei fester Ordnung M) eine Funktion von m und wird als solche auch mit $\mu(m)$ bezeichnet. *Sie enthält all die Elemente von $\mathfrak{M}$ und nur sie, die in $\mathfrak{M}$ auf m nachfolgen.*

Die Menge $\mu_m + \{m\} = \mathfrak{D}\mathsf{M}_{m \varepsilon y}$, die nach Nr. 15 gleichfalls Element von M ist, heißt das zu $m \varepsilon \mathfrak{M}$ gehörige (ungeordnete) Endintervall der geordneten Menge $\mathfrak{M}$.

Zu beweisen ist nur noch die kursiv gedruckte Behauptung, aus der sich die (im Anschluß an *Hausdorff* verwendeten) Bezeichnungen erklären. Zunächst gilt nach Def. 3 für jedes Element m' von μ_m: $m \overset{\mathfrak{M}}{<} m'$; denn es ist zwar m', nicht

aber m Element von μ_m. Ist umgekehrt $m \overset{\mathfrak{M}}{<} m'$, d. h. gibt es zu m' ein Element μ von M, das zwar m', nicht aber m als Element enthält, so ist μ Teilmenge des in Nr. 16 eingeführten Durchschnitts $\mathfrak{D}\mathsf{M}_{m \varepsilon y} = D$; das folgt nach Grundbed. I daraus, daß dieser (gleich μ zu den Elementen von M gehörende) Durchschnitt seiner Definition nach m als Element enthält. Aus $\mu \neq D$ folgt $m' \varepsilon D$, also wegen $m \neq m'$ auch $m' \varepsilon (D - \{m\}) = \mu_m$, w. z. b. w.

21. Eine monotone (Nr. 11) Menge M von Teilmengen von M stellt dann und nur dann eine Ordnung von M dar, wenn M folgende Eigenschaften besitzt:

erstens: sind m und m' zwei beliebige Elemente von M, so gibt es mindestens ein Element von M, das ein einziges der Elemente m und m' enthält;

zweitens: ist M' eine beliebige Teilmenge von M, so sind $\mathfrak{S}\mathsf{M}'$ und $\mathfrak{D}\mathsf{M}'$ Elemente von M;

drittens: M selbst und die Nullmenge sind Elemente von M.

Die durch die Worte „und nur dann" ausgedrückte Behauptung ist schon in den Nrn. 15/16 und 12 enthalten und dort bewiesen worden.

Da M nach Voraussetzung der Grundbed. I (Monotonie) genügt, ist aus den drei obigen Eigenschaften noch das Erfülltsein der Grundbed. II zu folgern. Es sei also M' eine beliebige Teilmenge von M, die zusammen mit den Elementen von M der Grundbed. I genügt; zu zeigen ist: $M' \varepsilon \mathsf{M}$. D' sei der Durchschnitt all der Elemente y von M, die M' als Teilmenge enthalten, also

$$D' = \mathfrak{D}\mathsf{M}_{M' \varepsilon \mathfrak{U} y} = \mathfrak{D}\overline{\mathsf{M}}.$$

Nach der zweiten der vorausgesetzten Eigenschaften ist $D' \varepsilon \mathsf{M}$, nach der dritten ist $\overline{\mathsf{M}} \neq 0$ und nach der Definition von D' ist $M' \neq D'$. Es soll gezeigt werden, daß $M' = D'$, wobei wegen der dritten Eigenschaft M' als von M und 0 verschieden angenommen werden kann.

m sei ein beliebiges *nicht* zu M' gehörendes Element von M, von dem also nachzuweisen ist, daß es auch nicht zu D' gehört. Zu jedem Element m' von M' bezeichne M' die Menge all der Elemente y von M, die m', aber nicht m enthalten; m. a. W. es ist $\mathsf{M}_{m \notin y} = \mathsf{M}''$, $\mathsf{M}''_{m' \varepsilon y} = \mathsf{M}'$, und M' ist nach Def. 1 (bei festem m) eine Funktion von m'. M' ist ferner eine *von* 0 *verschiedene* Teilmenge von M; denn nach der ersten der vorausgesetzten Eigenschaften gäbe es anderenfalls mindestens ein Element μ von M, das umgekehrt zwar m, aber nicht m' enthielte, und es könnte dann weder $\mu \neq M'$ noch $M' \neq \mu$ sein im Widerspruch mit der Annahme, wonach die Menge $\mathsf{M} + \{M'\}$ die Grundbed. I erfüllt. Schließlich ist $\mathfrak{S}\mathsf{M}'$ nach der zweiten Eigenschaft ein Element von M, das ebenfalls m', aber nicht m enthält [1]); als Funktion von m' aufgefaßt, sei $\mathfrak{S}\mathsf{M}'$ mit $\varphi(m')$ bezeichnet. Ersetzt man nun in M' jedes Element m' durch $\varphi(m')$, so entsteht nach Nr. 7 eine Teilmenge M_0 von M, und nach der zweiten Eigenschaft ist $\mathfrak{S}\mathsf{M}_0$ wiederum Element von M; $\mathfrak{S}\mathsf{M}_0$ enthält alle Elemente von M', aber nicht m.

---

[1]) Schon diese Menge $\mathfrak{S}\mathsf{M}'$ hat die Eigenschaft der nachher eingeführten Menge $\mathfrak{S}\mathsf{M}_0$ und könnte zum Abschluß des Beweises dienen. Die Herleitung dieser Tatsache ist aber umständlicher als der Umweg über M_0.

Nach der Definition von D' ist also $D' \notin \mathfrak{S}\mathsf{M}_0$, d. h. auch die (im Gegensatz zu $\mathfrak{S}\mathsf{M}_0$ von m unabhängige) Menge D' enthält (wie $\mathfrak{S}\mathsf{M}_0$) m *nicht* als Element. Nach dem Beginn dieses Absatzes besagt das $D' = M'$, w. z. b. w.

22 Dieses Ergebnis drückt die Gleichwertigkeit der (von *Kuratowski* stammenden) Grunddefinition und der Definition *Hessenbergs* (vgl Einleitung) aus. In letzterer Definition fehlt allerdings die dritte der in der vorigen Nr. hervorgehobenen Eigenschaften. Dies ist in der Tat ein (bisher anscheinend nicht bemerkter, übrigens unwesentlicher) Mangel jener Definition. Ebenso nämlich wie der zweite (auf den Durchschnitt bezügliche) Teil der zweiten Eigenschaft (vgl. *Kuratowski*, a. a. O. S. 162, Fußn. 2) ist die dritte Eigenschaft erforderlich, um die Ordnung M *eindeutig* zu bestimmen, d. h. um jeder im üblichen Sinn die Menge M ordnenden Relation nur eine einzige Ordnung M entsprechen zu lassen. In der Tat steht es, falls die geordnete Menge ein erstes (letztes) Element enthält, ohne Heranziehung der dritten Eigenschaft noch frei, entweder $M(0)$ den Elementen von M beizugesellen oder nicht. So erhellt noch deutlicher als bisher der Vorzug der Grunddefinition, die alle drei Eigenschaften in der Grundbedingung II enthält.

23. Ist $\mathfrak{M}$ eine zur Menge M gehörige geordnete Menge, so heißt eine Teilmenge F von M (nach *Hausdorff*) ein Endstück von $\mathfrak{M}$, wenn aus $m \varepsilon F$ und $m \overset{\mathfrak{M}}{<} m'$ stets $m' \varepsilon F$ folgt (ebenso ein Anfangsstück von $\mathfrak{M}$, wenn aus $m \varepsilon F$ und $m'' \overset{\mathfrak{M}}{<} m$ stets $m'' \varepsilon F$ folgt).

Nach Nr. 20 ist jede Endstrecke und jedes Endintervall von $\mathfrak{M}$ ein Endstück von $\mathfrak{M}$, ebenso auch M selbst und die Nullmenge. Die Bedeutung des Begriffs „Endstück“ (vielfach — nach *Cantor* — als „Rest“ bezeichnet) für die vorliegende Ordnungstheorie erhellt aus dem Satz:

Jedes Endstück der geordneten Menge $\mathfrak{M}$ ist ein Element der Ordnung M und umgekehrt. Die Ordnung ist also die Menge aller Endstücke der zugehörigen geordneten Menge.

Zunächst werde gezeigt, daß ein beliebiges Endstück F von $\mathfrak{M}$ ein Element von M ist, d. h. daß, wenn M' ein beliebiges Element von M bezeichnet, entweder $M' \notin F$ oder $F \notin M'$ gilt (vgl. Grundbed. II). Ist nämlich M' keine Teilmenge von F, so sei m' ein Element von M', das in F nicht vorkommt. Bedeutet dann $\mu_{m'}$ die zu $m' \varepsilon M$ gehörige Endstrecke von $\mathfrak{M}$ (Nr. 20), so ist $m' \varepsilon \mu_{m'}$ und $\mu_{m'} \varepsilon \mathsf{M}$; da andererseits $m' \varepsilon M' \varepsilon \mathsf{M}$, so ist nach Grundbed. I $\mu_{m'} \notin M'$. Ist schließlich f ein beliebiges Element des Endstückes F, so ist von den beiden allein möglichen Beziehungen $f \overset{\mathfrak{M}}{<} m'$ und $m' \overset{\mathfrak{M}}{<} f$ die erste ausgeschlossen, da sonst nach der Definition des Endstückes auch $m' \varepsilon F$ wäre; nach Nr. 20 kommt daher f in der Endstrecke $\mu_{m'}$ vor, d. h. es ist $F \notin \mu_{m'}$ und um so mehr $F \notin M'$.

Um die Umkehrung nachzuweisen, werde ein beliebiges Element von M mit μ, ein beliebiges Element von μ mit m bezeichnet. Ist m' ein weiteres Element von $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft $m \overset{\mathfrak{M}}{<} m'$, so gehört m' der durch m bestimmten Endstrecke von $\mathfrak{M}$ an, die nach Nr. 20 Element von M, also nach Grundbed. I Teilmenge von μ ist. Daher ist $m' \varepsilon \mu$, somit μ ein Endstück von $\mathfrak{M}$.

24. Sind M_1 und M_2 zwei Ordnungen von M, die zu jedem Paar $\{m, m'\}$ von Elementen aus M nach Def. 3 (Nr. 16) stets *gleichzeitig* $m \overset{\mathsf{M}_1}{<} m'$ und $m \overset{\mathsf{M}_2}{<} m'$ definieren oder umgekehrt, so sind nach der vorigen Nr. die Endstücke und somit auch die Ordnung das einemal dieselben wie das andremal, d. h. es ist $\mathsf{M}_1 = \mathsf{M}_2$. In loserer Form:

In einer gegebenen Menge und einer gegebenen Ordnungsvorschrift (im gewöhnlichen Sinn) zwischen ihren Elementen gibt es höchstens[1]) *eine einzige gemäß Def.* 3 *zugehörige Ordnung* M.

25. Ist M_0 eine beliebige Teilmenge von M und M eine Ordnung von M, so existiert erstens die Menge F_1 (bzw. I_1) derjenigen Elemente von M, die in $\mathfrak{M}$ gleichzeitig *allen* Elementen von M_0 nachfolgen (vorangehen), und zweitens die Menge F_2 (I_2) derjenigen Elemente von M, die in $\mathfrak{M}$ *irgend einem* Element von M_0 nachfolgen (vorangehen). F_1 und F_2 sind Endstücke, I_1 und I_2 Anfangsstücke von $\mathfrak{M}$; bei festem M ist jede dieser Mengen eine Funktion von M_0 (im Sinn der Def. 1). $F_1(I_1)$ wird als das zu M_0 gehörige Endstück (Anfangsstück) bezeichnet[2]).

Die vorstehenden Behauptungen gelten unverändert, falls die Vereinigungsmenge $F_2 + M_0$ bzw. $I_2 + M_0$ an die Stelle von F_2 bzw. I_2 gesetzt wird.

Es genügt den Beweis für I_1, I_2 und $I_2 + M_0$ zu führen; auf die übrigen Mengen überträgt er sich dann nach Nr. 19 durch Übergang zu der zu M inversen Ordnung.

Es ist aber I_1 bei gegebenem M die Menge der Elemente y von M, deren Endstrecke μ_y (Nr. 20) M_0 als Teilmenge umfaßt, d. h. $I_1 = M_{M_0 \varepsilon \mathfrak{U} \mu_y}$. Ebenso ist I_2 bei gegebenem M die Menge der Elemente y von M, deren Endstrecke μ_y einen von 0 verschiedenen Durchschnitt mit M_0 aufweist, d. h. $I_2 = M_{[\mu_y, M_0] \neq 0}$. Ihrer Natur nach sind beide Mengen ebenso wie $I_2 + M_0$ Anfangsstücke von $\mathfrak{M}$ und nach Def. 1 Funktionen von M_0.

26. *Durch die Ordnung* M *von* M *wird jede Teilmenge* M_0 *von* M *von selbst*[3]) *geordnet*, d. h. M bestimmt eine Ordnung M_0 von M_0, nach der vermöge Def. 3 je zwei Elemente von M_0 stets durch dieselbe Ordnungsbeziehung verknüpft sind wie nach M. M_0 ist nach Nr. 24 eindeutig bestimmt. Die zugehörige geordnete Menge $\mathfrak{M}_0$ heißt schlechthin geordnete Teilmenge (bezw. Endstück usw.) von $\mathfrak{M}$.

Zum Beweis werde erstens überhaupt eine Ordnung M_0 von M_0 folgendermaßen definiert: $\mathsf{M}_0 \in \mathfrak{U} M$ sei die Menge von Teilmengen von $M = \mathfrak{S}\mathsf{M}$, die nach Nr. 7 aus M dadurch hervorgeht, daß jedes Element μ von M durch den Durchschnitt $[\mu, M_0] = \varphi(\mu)$ ersetzt wird. (Hierbei brauchen übrigens die zu verschiedenen $\mu \varepsilon M$ gehörigen $\varphi(\mu)$ nicht von einander verschieden zu sein.) Demnach ist $\mathsf{M}_0 \in \mathfrak{U} M_0$.

---

[1]) Nr. 28 ermöglicht es, hier „höchstens“ fortzulassen.

[2]) In dem besonderen Fall $M_0 = \{m_0\}$ wird analog zu Nr. 20 I_1 als die zu m_0 gehörige Anfangsstrecke — nach *Cantor* Abschnitt —, $I_1 + M_0$ als das zu m_0 gehörige Anfangsintervall von $\mathfrak{M}$ bezeichnet. In diesem Fall ist offenbar $I_1 + F_1 + M_0 = M$.

[3]) Für diese Ausdrucksweise vergleiche man auch Nr. 29.

M_0 stellt eine Ordnung von M_0 dar. Sind nämlich μ_0' und μ_0'' zwei Elemente von M_0, etwa $\mu_0' = \varphi(\mu')$, $\mu_0'' = \varphi(\mu'')$, und gilt vermöge der Ordnungseigenschaft von M etwa $\mu' \neq \mu''$, so ist nach der Definition von φ auch $\mu_0' \neq \mu_0''$. Die Grundbed. I ist also für M_0 erfüllt. Um auch Grundbed. II als befriedigt nachzuweisen, werde mit $\overline{M_0}$ eine beliebige Teilmenge von M_0 bezeichnet, die zusammen mit den Elementen von M_0 der Grundbed. I genügt; zu zeigen ist $\overline{M_0} \varepsilon \mathsf{M}_0$, m. a. W. die Existenz eines Elementes $\overline{M} \varepsilon \mathsf{M}$, für das $\overline{M_0} = \varphi(\overline{M}) = [\overline{M}, M_0]$. Wir beweisen die Gültigkeit dieser Beziehung für die (nach der vorigen Nr. existierende und nach Nr. 23 in M als Element vorkommende) Menge $\overline{M}$ derjenigen Elemente von M, die irgend einem Element von $\overline{M_0} \neq M_0$ in $\mathfrak{M}$ nachfolgen oder gleich sind (so daß auch $\overline{M_0} \neq \overline{M}$).

Um diesen Beweis zu führen, ist nur zu zeigen, daß *jedes* Element m des Durchschnitts $[\overline{M}, M_0]$ der Teilmenge $\overline{M_0}$ von M_0 und $\overline{M}$ als Element angehört. Zunächst besagt $m \varepsilon \overline{M}$ (nach der soeben getroffenen Verfügung über $\overline{M}$) die Existenz eines Elements m_0 von $\overline{M_0}$, für das entweder $m_0 = m$ oder $m_0 \overset{\mathfrak{M}}{<} m$ gilt. Im ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten bezeichne μ_{m_0} die zu m_0 gehörige Endstrecke von $\mathfrak{M}$ (Nr. 20) und $[\mu_{m_0}, M_0] = \mu_0$ ihren Durchschnitt mit M_0, der also (wegen $m \varepsilon M_0$) das Element m enthält; dann ist nach Nr. 20 $\mu_{m_0} \varepsilon \mathsf{M}$, also (nach der obigen Definition von M_0) $\mu_0 \varepsilon \mathsf{M}_0$. Nach der im vorigen Absatz über $\overline{M_0}$ gemachten Voraussetzung gilt daher eine der Beziehungen $\overline{M_0} \neq \mu_0$ und $\mu_0 \neq \overline{M_0}$, und zwar nur die letztere, da m_0 (nach Nr. 20) nicht in μ_0, wohl aber in $\overline{M_0}$ vorkommt. Schließlich folgt aus $m \varepsilon \mu_0$ und $\mu_0 \neq \overline{M_0}$ das gewünschte Resultat $m \varepsilon \overline{M_0}$.

Zweitens ist zu zeigen, daß die konstruierte Ordnung M_0 von M_0 zwei Elementen m_0 und m_0' von M_0, für die etwa $m_0 \overset{\mathsf{M}}{<} m_0'$ gilt, nach Def. 3 auch die Beziehung $m_0 \overset{\mathsf{M}_0}{<} m_0'$ auferlegt. Gemäß dieser Definition enthält nach Voraussetzung M ein Element μ, das m_0', aber nicht m_0 enthält. Dann enthält aber der Durchschnitt $[\mu, M_0]$, der nach der Definition von M_0 dieser Menge angehört, ebenfalls m_0' und nicht m_0, w. z. b. w.

Der bewiesene Satz gestattet offenbar, gewisse auf die Ordnung bezügliche Eigenschaften von einer geordneten Menge $\mathfrak{M}$ auf Teilmengen von ihr zu übertragen und umgekehrt; so erweist sich z. B., falls $\mathfrak{M}$ ein erstes Element m besitzt, m auch als erstes Element jeder geordneten Teilmenge von $\mathfrak{M}$, in der m vorkommt.

27. Zum Schluß soll in dieser und den folgenden Nrn. noch die Verbindung zwischen der hier benutzten Ordnungsdefinition und der *Hausdorff*schen, die unmittelbar an die gewöhnliche Vorstellung anknüpft, hergestellt werden. Diese Überlegung, die als Umkehrung der Nr. 17 aufgefaßt werden kann, ist zwar systematisch nicht erforderlich und *wird in den folgenden Paragraphen nicht benutzt*; aber als Brücke zum gewöhnlichen Ordnungsbegriff wird sie erwünscht sein, und sie läßt auch ersichtlich werden, daß für die Zwecke der Axiomatik die obige Grunddefinition wesentliche Vorzüge besitzt.

Lediglich zur Vereinfachung des Nächstfolgenden werde definiert: Ist $a \neq b$, so werden die Mengen $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ und $\{\{b\}, \{a, b\}\}$ als orientierte Paare (genauer: als die zum Paar $\{a, b\}$

gehörigen orientierten Paare) bezeichnet[1]). Sind a und b Elemente einer Menge M, so heißen jene Paare orientierte Paare aus M. Es gilt:

Zu jeder Menge M existiert die Menge aller orientierten Paare aus M.

Die zu jedem einzelnen Paar $\{a, b\} = p$ sicher existierende Menge $\bar{p}$ der (zwei) zugehörigen orientierten Paare läßt sich zunächst als Funktion *von p allein* auffassen: wird z. B. $\{\{x\}, p\} = q(x)$ gesetzt, so ist $\bar{p} = \{\{\{a\}, \{a, b\}\}, \{\{b\}, \{a, b\}\}\}$ die Teilmenge von $\mathfrak{U}\mathfrak{U}p$, die aus p hervorgeht, indem jedes Element y von p durch $q(y)$ ersetzt wird. $\bar{p} = \psi(p)$ ist also nach Nr. 7 eine Funktion von p.

Wird nun in der nach Nr. 13 existierenden Menge N aller Paare von Elementen aus M jedes Element y von N durch die soeben definierte Menge $\psi(y)$ ersetzt, so entsteht nach Nr. 7 eine Teilmenge N^* von $\mathfrak{U}\mathfrak{U}\mathfrak{U}M$, die die Mengen der zu jedem einzelnen Paar von Elementen aus M gehörigen orientierten Paare als Elemente enthält. $\mathfrak{S}N^*$ ist also die gewünschte Menge aller orientierten Paare aus M.

28. Um nun Nr. 17 umzukehren, d. h. von einer einfachen Ordnung im gewöhnlichen Sinn auf eine Ordnung im Sinn der Grunddefinition zu schließen, gehe man aus von einer zwischen je zwei Elementen der gegebenen Menge M definierten asymmetrischen und transitiven Relation $\prec$. Will man diese nicht geradezu als eine *Grundbeziehung* voraussetzen, so kann man sie formalisieren durch Vorlegung einer gewissen Menge, am einfachsten nach dem Schema *Hausdorffs*: Gegeben sind hier zwei Mengen von „geordneten Paaren“ (oder auch orientierten Paaren) aus M, von denen jede je ein einziges der beiden geordneten Paare enthält, die zu einem und demselben (ungeordneten) Paar von Elementen aus M gehören; schreibt man noch die Bedingung der Transitivität vor und deutet man schließlich ein geordnetes Paar (a, b) bezw. das entsprechende orientierte Paar $\{\{b\}, \{a, b\}\}$ als die (asymmetrische) Beziehung $a \prec b$, so ist deren Formalisierung erreicht. Insbesondere folgt offenbar (vgl. I, Nr. 7) aus $\{\{b\}, \{a, b\}\} = \{\{b'\}, \{a', b'\}\}$ stets $a = a'$, $b = b'$.

Es ist also zu beweisen (vgl. Nr. 24):

In einer Menge M sei durch eine Vorschrift eine asymmetrische transitive Beziehung $\prec$ zwischen je zwei Elementen von M definiert; dies kann z. B. geschehen durch Angabe eines Paares $\{P', P''\}$ elementefremder Mengen von orientierten Paaren aus M, das folgende Eigenschaften besitzt:

1) $P' + P''$ ist die Menge aller orientierten Paare aus M.

2) Ist p ein Paar von Elementen aus M, so ist von den beiden (nach der vorigen Nr.) zu p gehörigen orientierten Paaren eines Element von P', das andere Element von P''.

3) Sind $\{\{b\}, \{a, b\}\}$ und $\{\{c\}, \{b, c\}\}$ Elemente von P', so ist auch $\{\{c\}, \{a, c\}\}$ Element von P'. (Eigenschaft der Transitivität.)

An Stelle der Beziehung $a \prec b$ tritt dann etwa die folgende: $\{\{b\}, \{a, b\}\} \varepsilon P'$.

Unter dieser Voraussetzung gibt es eine einzige Ordnung M *von M mit folgender Eigenschaft: Sind a und b Elemente von M und ist $a \prec b$ (oder gleichbedeutend $\{\{b\}, \{a, b\}\} \varepsilon P'$), so gibt es ein Element von* M, *das b, aber nicht a als Element enthält; und umgekehrt.*

Zu Beweis denken wir uns ein Paar $\{P', P''\}$ der bezeichneten Art gegeben. Bezeichnet man dann jede Teilmenge M_0 von M, die gleichzeitig mit einem Element $a \varepsilon M_0$ auch jedes Element b von M mit der Eigenschaft $a \prec b$ enthält, als einen *Rest* von M (in bezug auf $\prec$ oder $\{P', P''\}$), so werde M als die Menge aller Reste von M gewählt. Zu zeigen ist, daß diese Menge existiert und eine Ordnung von M mit der obigen Eigenschaft darstellt.

Bezeichnet man die Menge aller $y \varepsilon M$, für die (zu gegebenem $a \varepsilon M$) $a \prec y$ gilt, mit $\varphi(a)$, also $M_{\{\{y\}, \{a, y\}\} \varepsilon P'} = \varphi(a)$ (vgl. Def. 1), so ist nach der soeben getroffenen Festsetzung eine Teilmenge M_0 von M dann und nur dann Element von M, wenn aus $a \varepsilon M_0$ stets $\varphi(a) \notin M_0$ folgt. M ist also die Menge derjenigen $y \varepsilon \mathfrak{U}M$, die für jedes $x \varepsilon y$ der Beziehung $\varphi(x) \varepsilon \mathfrak{U}y$ genügen, und existiert somit nach Nr. 6. Daß M eine Ordnung von M darstellt, also die beiden Grundbedingungen

---

[1]) Die orientierten Paare entstehen also aus den zugehörigen geordneten Mengen (Nr. 12), die selbst nicht Paare sind, durch Fortlassung der Nullmenge. Vgl. *Kuratowski* a. a. O. — Die Verwendung der einfacheren Mengen $\{a, \{a, b\}\}$ würde zu mehrdeutigen Verhältnissen Anlaß geben.

befriedigt, ist analog dem Gedankengang *Kuratowskis* (a. a. O., S. 165f.) leicht einzusehen; die dortige Betrachtung läßt sich unter Benutzung der obigen Funktion $\varphi(x)$ leicht auf die hier verwendete Grundlage übertragen.

Schließlich hat M die am Schluß des Satzes ausgesprochene Eigenschaft. Denn z. B. die oben definierte Menge $\varphi(a)$, die bei $a < b$ nicht a, wohl aber b enthält, ist ein Rest von M (in bezug auf $<$) und daher ein Element von M. Die Umkehrung ist eine Folge der Eigenschaft 2). Endlich folgt die eindeutige Bestimmtheit von M aus Nr. 24.

29. (Umkehrung der vorigen Nr.) Jede Ordnung M der Menge M bestimmt eindeutig ein Paar $\{P', P''\}$ von Mengen orientierter Paare aus M derart, daß (bei Bezeichnung des passenden Elements von $\{P', P''\}$ mit P') außer den in der vorigen Nr. hervorgehobenen Eigenschaften 1) und 2) noch die folgende erfüllt ist:

3′) Ist $\{\{b\}, \{a, b\}\} \varepsilon P'$, so gibt es ein Element von M, das b, aber nicht a als Element enthält.

Diese Menge P' besitzt überdies stets die Transitivitätseigenschaft 3) der vorigen Nr.

Schreibt man $a < b$ statt $\{\{b\}, \{a, b\}\} \varepsilon P'$ und demgemäß $b < a$ statt $\{\{b\}, \{a, b\}\} \varepsilon P''$, so hat man den Übergang von der Ordnung M zur Ordnung einer Menge im gewöhnlichen Sinn.

Zum Beweise werde zunächst gezeigt, daß zu jeder Ordnung M von M *mindestens* ein Paar $\{P', P''\}$ der bezeichneten Art gehört. Ist P die Menge aller orientierten Paare aus M (Nr. 27), so sei P' die Menge derjenigen Elemente $p = \{\{b\}, \{a, b\}\}$ von P, die man erhält, wenn man a die Elemente von M und b bei festem a die Elemente der Endstrecke μ_a von $\mathfrak{M}$ (Nr. 20) durchlaufen läßt. Diese Menge P' existiert. Denn für festes $a \varepsilon M$ ist, da $[\{a\}, \mu_a] = 0$, das Produkt $\{a\} \cdot \mu_a$ (Nr. 5) die Menge aller Paare $\{a, b\}$ im obigen Sinn; dieses Produkt ist äquivalent zu μ_a oder auch zu der Menge $\overline{\mu_a}$ aller nur *ein* Element enthaltenden Teilmengen von μ_a (I, Nr. 7), und es existiert eine Abbildung zwischen beiden Mengen, die jedem $\{b\} \varepsilon \overline{\mu_a}$ das Paar $\{a, b\}$ mit dem nämlichen b zuordnet (vgl. I, Nr. 16), nämlich die Menge $\psi(a)$ aller Paare $\{\{b\}, \{a, b\}\}$ von der Eigenschaft $\{b\} \varepsilon \overline{\mu}_a$; sie stellt nach Def. 1 eine Funktion von a dar. Wird schließlich jedes Element y von M durch $\psi(y)$ ersetzt, so entsteht gerade die oben definierte Menge P', die somit als Teilmenge von P nach Nr. 7 existiert.

P' hat zusammen mit der Menge $P'' = P - P'$ die im Satz ausgedrückten vier Eigenschaften, von denen die erste aus der Definition von P'' folgt. Ist weiter $p = \{a, b\}$ ein Paar von Elementen aus M, so ist nach Def. 3 entweder $a \overset{\mathsf{M}}{<} b$ oder $b \overset{\mathsf{M}}{<} a$. Im ersten Fall ist (Nr. 20) b Element der zu a gehörigen Endstrecke von $\mathfrak{M}$ und nicht umgekehrt, d. h. (nach der im vorigen Absatz getroffenen Definition von P') das orientierte Paar $\{\{b\}, \{a, b\}\}$ ist Element von P', nicht aber das orientierte Paar $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, das also nach Eigenschaft 1) zu P'' gehört; der Fall $b \overset{\mathsf{M}}{<} a$ erledigt sich entsprechend, womit Eigenschaft 2) nachgewiesen ist. Ebenso folgt 3′) daraus, daß $\{\{b\}, \{a, b\}\} \varepsilon P'$ nach Definition die Zugehörigkeit von b zu der zu a gehörigen Endstrecke von $\mathfrak{M}$ ausdrückt; denn diese Endstrecke, die b, aber nicht a enthält, ist nach Nr. 20 Element von M. Schließlich folgt 3) auf Grund von 3′) aus Nr. 17.

Was endlich die *eindeutige* Bestimmtheit von $\{P', P''\}$ durch M betrifft, so gehört, da außer 1), 2), 3′), auch noch 3) erfüllt ist, auch zu jedem zweiten Paare $\{\overline{P'}, \overline{P''}\}$, das im Sinne dieser Nr. der Ordnung M entspricht, nach der vorigen Nr. dieselbe Menge M als Ordnung. Gilt also vermöge $\{P', P''\}$ etwa $a < b$, d. h. $\{\{b\}, \{a, b\}\} \varepsilon P'$, so ist nach der vorigen Nr. $a \overset{\mathsf{M}}{<} b$, während aus $\{\{a\}, \{a, b\}\} \varepsilon \overline{P'}$ sich $b \overset{\mathsf{M}}{<} a$ ergäbe; nach Nr. 17 sind beide Beziehungen miteinander unverträglich, es ist also wirklich $\{P', P''\} = \{\overline{P'}, \overline{P''}\}$.

§ 3. Theorie der Ähnlichkeit.

30. Entsprechend zu Definition 2 (§ 1) gelte:

Definition 4a. Zwei elementefremde geordnete Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ heißen ähnlich ($\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$), wenn zwischen M und N eine Abbildung $\Phi \leqq M \cdot N$ existiert,

die folgende Bedingung erfüllt: sind $\{m_1, n_1\}$ und $\{m_2, n_2\}$ Elemente von Φ, so folgt aus $m_1 \overset{\mathfrak{M}}{<} m_2$ stets $n_1 \overset{\mathfrak{N}}{<} n_2$ und umgekehrt.

Eine derartige Abbildung Φ, die offenbar symmetrisch inbezug auf $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ ist, heißt eine ähnliche Abbildung zwischen beiden Mengen. Ist $\{m, n\} \varepsilon \Phi$, so heißen m und n einander (durch Φ) zugeordnet, Bilder von einander usw.

Elementefremde ähnliche Mengen sind hiernach umsomehr äquivalent.

31. *Zu je zwei elementefremden geordneten Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ existiert die Menge Υ aller ähnlichen Abbildungen zwischen ihnen.*

Die Mengen sind also ähnlich oder nicht, je nachdem $\Upsilon \neq 0$ oder $= 0$ ist. Υ ist sicher dann $= 0$, wenn M und N nicht einmal äquivalent sind.

Zum Nachweis von Υ bezeichne zunächst $\Xi \in \mathfrak{U}(M \cdot N)$ die Menge aller Abbildungen zwischen den elementefremden Mengen M und N (Nr. 9); dann und nur dann ist $\Xi \neq 0$, wenn $M \sim N$. Ferner sei Φ ein beliebiges Element von Ξ und $\{p_1, p_2\} = \{\{m_1, n_1\}, \{m_2, n_2\}\} \in \Phi$ ein beliebiges Paar von Elementen aus Φ; $\mu(x)$ bezw. $\nu(x)$ möge die Funktion darstellen, die gemäß Nr. 20 zu einem beliebigen Element m von $\mathfrak{M}$ bezw. n von $\mathfrak{N}$ die zugehörige Endstrecke $\mu(m)$ von $\mathfrak{M}$ bezw. $\nu(n)$ von $\mathfrak{N}$ bestimmt. Demgemäß hat Φ dann und nur dann den Charakter einer *ähnlichen* Abbildung, wenn aus $m_k \varepsilon \mu(m_i)$ stets $n_k \varepsilon \nu(n_i)$ folgt und umgekehrt, d. h. wenn

$$\{m_k, n_k\} \in \mu(m_i) + \nu(n_i) \qquad (i, k = 1, 2;\ i \neq k).$$

Damit Φ eine ähnliche Abbildung zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ sei, ist also notwendig und hinreichend, daß in jedem Paar $x = \{p_1, p_2\}$ von Elementen aus Φ (mindestens) ein Element $y = \{m_k, n_k\}$ von x vorkommt, für das

$$y \in \mu(m_i) + \nu(n_i) = \mu(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}x - y, M]) + \nu(\mathfrak{S}[\mathfrak{S}x - y, N]) = \varphi(x, y)$$

gilt, wo $[a, b]$ wie gewöhnlich den Durchschnitt von a und b bezeichnet. Ist gemäß Nr. 13 $\pi(\Phi)$ die Menge aller Paare von Elementen aus Φ, so stellt sich also die Menge Υ aller ähnlichen Abbildungen dar als die Menge derjenigen Elemente $z = \Phi$ von Ξ, die für jedes Element x von $\pi(z)$ der Bedingung

$$\psi(x, z) = x_{y \varepsilon \mathfrak{U} \varphi(x, y)} \neq 0$$

genügen, wo $\varphi(x, y)$ die obige Bedeutung hat. Υ existiert somit nach Nr. 6 und ist eine Teilmenge von $\mathfrak{U}(M \cdot N)$.

Wie die Ableitung zeigt, hängt Υ nur von den Mengen Ξ, M, N und (hinsichtlich der Funktionen $\mu(x)$ und $\nu(x)$) M, N ab, also nach den Nrn. 12, 9, 16 nur von M und N. Ist also eine dieser beiden Ordnungen gegeben und die andere variabel ($= x$) oder sind beide Ordnungen Funktionen der nämlichen Variabeln x, so ist auch Υ eine Funktion von x.

Die Sätze und Beweise der Nrn. 32—35 schließen sich eng an entsprechende Betrachtungen in der *Äquivalenztheorie* an (Z., § 2; I, § 3) und können demgemäß kurz behandelt werden.

32. Sind $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{N}$ paarweise elementefremde geordnete Mengen, so folgt aus $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R} \simeq \mathfrak{N}$ stets $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$. Die Ähnlichkeit ist also eine (symmetrische und) transitive Beziehung.

Der Beweis, der sich ohne grundsätzliche Schwierigkeit entsprechend wie in I, Nr. 15, vollzieht, bedarf keiner Ausführung.

33. Ist N eine Menge, $\mathfrak{M}$ eine geordnete Menge, so gibt es (mindestens) eine geordnete Menge, die zu $\mathfrak{M}$ und N elementefremd und zu $\mathfrak{M}$ ähnlich ist.

Es sei nämlich r eine Menge, die nicht Element von $M + \mathfrak{S}(M + N)$ ist. Dann ist das Produkt $R = M \cdot \{r\}$ elementefremd zu $M + N$; denn jedes Element des Produktes hat die Form $\{m, r\}$, wo $m \varepsilon M$, und aus $\{m, r\} \varepsilon (M + N)$ würde folgen $r \varepsilon \mathfrak{S}(M + N)$ gegen die Voraussetzung.

Ferner sei Φ die Abbildung zwischen den äquivalenten Mengen M und R, die der jeweiligen Zuordnung der Elemente $m \varepsilon M$ und $\{m, r\} \varepsilon R$ entspricht (vgl. I, Nr. 16), und $\tau(x)$ gemäß Nr. 10 die Funktion, die jeder Teilmenge M_0 von M die ihr nach Φ entsprechende Teilmenge $R_0 = \tau(M_0)$ von R zuordnet. Ersetzt man dann in der Ordnung M von M jedes Element y von M durch die Menge $\tau(y)$, so entsteht nach Nr. 7 eine Teilmenge P von $\mathfrak{U} R$, die sich als eine Ordnung von R erweist. Sind nämlich M_0 und M_1 zwei beliebige Elemente von M (also Teilmengen von M), $\tau(M_0) = R_0$ und $\tau(M_1) = R_1$ die entsprechenden Elemente von P, und ist etwa (gemäß Grundbed. I für M) $M_0 \neq M_1$, so ist offenbar auch $R_0 \neq R_1$. Ist ferner R' eine Teilmenge von R, die mit allen Elementen von P der Grundbed. I genügt, und ist $M' = \mathfrak{S} R' - \{r\}$ die (in dem zu $\tau(x)$ inversen Sinn) entsprechende Teilmenge von M, so muß auch M' mit allen Elementen von M der Grundbed. I genügen, also (gemäß Grundbed. II für M) selbst Element von M sein. Dann ist aber auch $\tau(M') = R'$ Element von P nach der Definition von P, d. h. P genügt gleichfalls der Grundbed. II und stellt somit eine Ordnung von R dar.

Schließlich erkennt man auf Grund der getroffenen Festsetzungen leicht, daß die benutzte Abbildung Φ eine ähnliche Abbildung zwischen $\mathfrak{M}$ und der durch P definierten geordneten Menge $\mathfrak{R}$ darstellt. $\mathfrak{R}$ ist also eine Menge von den nachzuweisenden Eigenschaften.

Aus dem vorstehenden Beweis ergibt sich bei Anwendung der Def. 3 (Nr. 16):

Ist $\mathfrak{M}$ eine geordnete Menge und r nicht Element von $\mathfrak{M}$, so läßt sich das Produkt $R = M \cdot \{r\}$ ordnen durch die Festsetzung: $\{m, r\} \overset{\mathfrak{R}}{<} \{m', r\}$, falls $m \overset{\mathfrak{M}}{<} m'$ (m und m' Elemente von $\mathfrak{M}$). Die entstehende geordnete Menge $\mathfrak{R}$ ist ähnlich $\mathfrak{M}$ und kann ohne Mißverständnis mit $\mathfrak{M} \cdot \{r\} = \{r\} \cdot \mathfrak{M}$ bezeichnet werden. Ihre Ordnung P entsteht aus der Ordnung M von $\mathfrak{M}$ dadurch, daß in jedem Element M_0 von M jedes $m_0 \varepsilon M_0$ durch $\{m_0, r\}$ ersetzt wird; bei festem M ist daher P eine Funktion von r.

34. **Definition 4b.** Zwei beliebige (nicht notwendig elementefremde) geordnete Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ heißen ähnlich, wenn es eine „vermittelnde" geordnete Menge $\mathfrak{R}$ gibt, die zu $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ sowohl elementefremd wie auch (gemäß Def. 4a) ähnlich ist [1]).

---

[1]) Eine Definition der Ähnlichkeit wäre auch in *einem* Schritt und ohne vermittelnde Menge, im Sinn des Satzes von Nr. 36, möglich; doch ist das hier eingeschlagene Verfahren begrifflich vorzuziehen.

Für elementefremde Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ steht diese Definition nach den Nrn. 32/33 im Einklang mit Def. 4 a, die durch sie zu einer Definition der Ähnlichkeit für zwei *beliebige* geordnete Mengen ergänzt wird. Die Ähnlichkeit ist hiernach eine reflexive ($\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{M}$) und symmetrische Beziehung. $m \varepsilon \mathfrak{M}$ und $n \varepsilon \mathfrak{N}$ heißen „einander vermöge der simultanen ähnlichen Abbildungen $\Phi \in M \cdot R$ und $\Psi \in R \cdot N$ zugeordnet" usw., wenn es ein Element r von $\mathfrak{R}$ gibt, dem sowohl m vermöge Φ wie n vermöge Ψ entspricht.

Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei beliebige geordnete Mengen, $\mathfrak{R}$ gemäß Nr. 33 eine zu beiden elementefremde und zu $\mathfrak{M}$ ähnliche geordnete Menge, und ist Υ gemäß Nr. 31 die Menge aller ähnlichen Abbildungen zwischen den elementefremden Mengen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{N}$, so ist hiernach $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$, sobald $\Upsilon \neq 0$. Aber auch *nur* dann; denn aus $\mathfrak{R} \simeq \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$ (d. h. nach Def. 4 a: $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{N}$, wo $\mathfrak{S}$ elementefremd zu $M + N + R$ angenommen werden kann und soll) folgt nach Nr. 32 $\mathfrak{R} \simeq \mathfrak{N}$, d. h. $\Upsilon \neq 0$.

Man erkennt leicht, daß nunmehr allgemein aus $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R} \simeq \mathfrak{N}$ stets $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$ folgt. Ferner ergibt sich:

Eine geordnete Menge mit einem einzigen Element ist jeder ebensolchen und nur einer solchen ähnlich.

35. Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ ähnliche Mengen und $\mathfrak{R}$ eine zugehörige vermittelnde Menge, so gibt es zu jedem Paar $\{\Phi, \Psi\}$ simultaner ähnlicher Abbildungen $\Phi \in M \cdot R$ und $\Psi \in R \cdot N$ eine Funktion $\varphi(x)$, die jedem Element m von $\mathfrak{M}$ sein Bild n in $\mathfrak{N}$ in der Form $n = \varphi(m)$ zuordnet, und eine Funktion $\psi(x)$, die jeder (geordneten) Teilmenge $\mathfrak{M}_0$ von $\mathfrak{M}$ (vgl. Nr. 26) eine bestimmte Teilmenge $N_0 = \psi(M_0)$ von N zuordnet, die die Bilder der Elemente von M_0 und nur sie als Elemente enthält und die in der ihr durch $\mathfrak{N}$ aufgeprägten Ordnung eine zu $\mathfrak{M}_0$ ähnliche Menge $\mathfrak{N}_0$ darstellt.

Zu beweisen ist nur noch die letzte Behauptung, da alles Übrige in Nr. 10 enthalten ist. Sind also m_0 und m_0' zwei beliebige Elemente von M_0, n_0 und n_0' ihre Bilder in N vermöge $\{\Phi, \Psi\}$, und ist $m_0 \overset{\mathfrak{M}}{<} m_0'$, also auch $m_0 \overset{\mathfrak{M}_0}{<} m_0'$, so gilt wegen $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$ auch $n_0 \overset{\mathfrak{N}}{<} n_0'$, also nach Nr. 26 auch $n_0 \overset{\mathfrak{N}_0}{<} n_0'$.

36. M und N seien Mengen und $\varphi(x)$ eine Funktion derart, daß N alle und nur die Elemente der Form $n = \varphi(m)$ enthält, wo $m \varepsilon M$, und daß für zwei verschiedene Elemente m und m' von M stets $\varphi(m) \neq \varphi(m')$ gilt [1]). Ist dann M eine Ordnung von M, so bestimmt die Regel: „$\varphi(m) \overset{\mathsf{N}}{<} \varphi(m')$, falls $m \overset{\mathsf{M}}{<} m'$" eine Ordnung N von N, vermöge deren $\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{M}$ wird, und zwar geht N aus M dadurch hervor, daß in jedem Element μ von M jedes $m \varepsilon \mu$ durch $\varphi(m) \varepsilon N$ ersetzt wird.

Der Beweis dieses Satzes, der eine Verallgemeinerung des Schlußsatzes von Nr. 33 darstellt, kann entweder durch Zurückführung auf die Nrn. 28/29 oder direkt auf folgendem Weg erbracht werden. Wir weisen zunächst nach, daß *die am Schluß definierte Menge* N *existiert und eine der obigen Regel entsprechende Ordnung von* N *darstellt.* Zunächst existiert nach Nr. 10 die Funktion $\tau(x)$, die jeder Teilmenge

[1]) Es ist dann $M \sim N$, und umgekehrt gibt es nach Nr. 10 zu zwei äquivalenten Mengen M und N stets solche Funktionen $\varphi(x)$.

μ von M die Teilmenge $\tau(\mu) = \nu \in N$ zuordnet, welche statt der $m \varepsilon \mu$ die entsprechenden $\varphi(m) \varepsilon N$ als Elemente enthält. Durchläuft μ die Elemente von M, so entsteht daher nach Nr. 7 die gewünschte Menge N als die Teilmenge von $\mathfrak{U} N$, die alle jene $\tau(\mu)$ und nur sie enthält. Sind μ und μ' verschiedene Elemente von M, so ist auch $\tau(\mu) \neq \tau(\mu')$; denn ist m ein in μ, nicht aber in μ' vorkommendes Element von M, so ist $\varphi(m) \varepsilon \tau(\mu)$, aber (nach der über φ gemachten Voraussetzung) $\varphi(m)$ verschieden von allen Elementen von $\tau(\mu')$. Um N als eine Ordnung von N zu erweisen, bezeichne man zwei beliebige Elemente von N mit ν und ν'; nach den getroffenen Festsetzungen ist $\nu = \tau(\mu)$, $\nu' = \tau(\mu')$, wo μ und μ' Elemente von M bedeuten. Ist gemäß Grundbed. I etwa $\mu \in \mu'$, so ist nach der Natur der Funktion $\tau(x)$ auch $\nu \in \nu'$, d. h. Grundbed. I ist auch für N erfüllt. Ist ferner $\overline{N}$ eine Teilmenge von N, die mit allen Elementen von N der Grundbed. I genügt, so sei $\overline{M} = M_{\varphi(y) \varepsilon \overline{N}}$ die entsprechende Teilmenge von M, die statt jedes $\varphi(y) \varepsilon \overline{N}$ das Element $y \varepsilon M$ enthält. Dann genügt $\overline{M}$ mit allen Elementen von M der Grundbed. I; denn aus $\overline{N} \in \nu = \tau(\mu) \varepsilon \mathsf{N}$ folgt nach der Definition von $\tau(x)$ stets $\overline{M} \in \mu$. Daher ist nach Grundbed. II $\overline{M} \varepsilon \mathsf{M}$ und somit (nach der Definition von N) auch $\overline{N} \varepsilon \mathsf{N}$, d. h. N ist eine Ordnung von N. Schließlich geht aus zweimaliger Anwendung von Def. 3 (Nr. 17) hervor, daß diese Ordnung N der im Satz ausgesprochenen Regel entspricht, und aus Nr. 24, daß N die *einzige* Ordnung dieser Art von N darstellt.

Der zweite Teil des Beweises hat zu zeigen, daß *die durch* N *definierte geordnete Menge* $\mathfrak{N}$ *der gegebenen geordneten Menge* $\mathfrak{M}$ *ähnlich ist.* Falls zunächst $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ elementefremd sind, so ist schon die Abbildung $\Phi \in M \cdot N$, deren Elemente die Form $\{m, \varphi(n)\}$, wo $m \varepsilon M$, haben (vgl. Nr. 10), eine ähnliche Abbildung zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, wie aus dem Schluß des vorigen Absatzes folgt. Sind aber $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ nicht elementefremd, so ist zum Beweis der Ähnlichkeit nach Def. 4 b eine dritte geordnete Menge einzuführen. Es sei nämlich $\mathfrak{R}$ gemäß Nr. 33 eine zu $M + N$ elementefremde und zu $\mathfrak{M}$ ähnliche geordnete Menge. Ist $\Psi(x)$ die Funktion, die gemäß einer ähnlichen Abbildung ψ zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{R}$ jedem $\tau \varepsilon R$ sein Bild $\psi(r) = m \varepsilon \mathfrak{M}$ zuordnet, so werde $\varphi(\psi(x)) = \chi(x)$ gesetzt; dann ordnet $\chi(x)$ jedem $r \varepsilon \mathfrak{R}$ das ihm „über $\mathfrak{M}$" entsprechende Element von $\mathfrak{N}$, nämlich $\varphi(m) = \chi(r) = n \varepsilon \mathfrak{N}$, zu. Sind r und r' zwei verschiedene Elemente von $\mathfrak{R}$, so ist (da ψ eine Abbildung ist) $\psi(r) \neq \psi(r')$, also nach der im Satz vorausgesetzten Eigenschaft von φ auch $\chi(r) \neq \chi(r')$. Die nach Nr. 7 existierende Teilmenge X von $R \cdot N$, die die Elemente $\{r, \chi(r)\}$ und nur sie enthält, ist also eine Abbildung zwischen den elementefremden Mengen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{N}$, und zwar eine ähnliche; denn ist $r \overset{\mathfrak{R}}{<} r'$, so folgt wegen der Ähnlichkeit der Abbildung Ψ: $\psi(r) \overset{\mathfrak{M}}{<} \psi(r')$, also nach dem Schluß des vorigen Absatzes $\chi(r) \overset{\mathfrak{N}}{<} \chi(r')$. Aus $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R} \simeq \mathfrak{N}$ folgt schließlich nach Def. 4 b: $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$, w. z. b. w.

37. Eine unmittelbare, für die Multiplikation geordneter Mengen wichtige Folge des letzten Satzes ist:

Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ geordnete Mengen, so gibt es zu $\mathfrak{M}$ ähnliche geordnete Mengen $\overline{\mathfrak{M}}$, so daß die Elemente von $\overline{\mathfrak{M}}$ lauter Ordnungen darstellen, die paarweise elementefremde und sämtlich zu $\mathfrak{N}$ ähnliche geordnete Mengen definieren.

Eine solche Menge $\overline{\mathfrak{M}}$ erhält man z. B. auf folgende Art: Ist z eine Unbestimmte, so ist das gemäß Nr. 33 geordnete Produkt $\{z\} \cdot \mathfrak{N} = \mathfrak{Z}$ ähnlich zu $\mathfrak{N}$, die zugehörige Ordnung Z eine Funktion $\varphi(z)$ von z. Sind zunächst $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ elementefremd, so existieren, während z die Elemente von $\mathfrak{M}$ durchläuft, sämtliche Mengen $\mathfrak{Z}$, da stets $[\{z\}, \mathfrak{N}] = 0$, und für jedes z ist $\mathsf{Z} \notin \mathfrak{U}(M \cdot N)$; überdies sind, wenn z_1 und z_2 zwei verschiedene Elemente von $\mathfrak{M}$ bezeichnen, die zugehörigen Mengen $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ elementefremd (umsomehr verschieden), weil stets $\{z_1, n\} \neq \{z_2, n'\}$; schließlich existiert die Menge $\overline{M}$ aller Ordnungen $\mathsf{Z} = \varphi(z)$ nach Nr. 7 als Teilmenge von $\mathfrak{UU}(M \cdot N)$ und erfüllt die in Nr. 36 über N gemachten Voraussetzungen. Daher existiert nach dieser Nr. die zu $\mathfrak{M}$ ähnliche geordnete Menge $\overline{\mathfrak{M}}$, die durch die Regel „$\varphi(z_1) \overset{\overline{\mathfrak{M}}}{<} \varphi(z_2)$, falls $z_1 \overset{\mathfrak{M}}{<} z_2$“ aus $\overline{M}$ entsteht; $\overline{\mathfrak{M}}$ besitzt die in unserem Satze angegebenen Eigenschaften.

Die nämliche Überlegung läßt sich auch anstellen, wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ nicht elementefremd sind; dann hat man nur statt mit $\mathfrak{M}$ mit einer zu $\mathfrak{M}$ ähnlichen und zu $\mathfrak{N}$ elementefremden geordneten Menge zu operieren, wie sie nach Nr. 33 existiert.

Für spätere Verwendung sei noch bemerkt, daß im Falle $[M, N] = 0$ das gewöhnliche Produkt $M \cdot N$ nichts anderes ist als die Vereinigungsmenge der Menge, die aus der im vorletzten Absatz konstruierten Menge $\overline{M}$ hervorgeht, falls jede Ordnung Z durch die zu ordnende Menge $\mathfrak{S}\mathsf{Z} = \{z\} \cdot N$ ersetzt wird.

38. Zu einer gegebenen geordneten Menge $\mathfrak{M}$, deren Elemente *Ordnungen* sind, läßt sich eine ihr ähnliche Menge $\mathfrak{M}'$ von Ordnungen derart angeben, daß je zwei (vermöge einer fest gewählten ähnlichen Abbildung zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$) einander entsprechende Elemente von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ zwei ähnliche geordnete Mengen definieren und daß die durch $\mathfrak{M}'$ definierten geordneten Mengen — m. a. W. die zu den Elementen von $\mathfrak{M}'$ gehörigen Vereinigungsmengen — paarweise untereinander sowie zu einer gegebenen Menge N elementefremd sind [1]).

Zum Beweis setze man $\mathfrak{S}\mathfrak{S}M = S$, so daß S die Elemente der durch $\mathfrak{M}$ definierten geordneten Mengen enthält, und bilde dann gemäß Nr. 33 eine geordnete Menge $\mathfrak{M}''$, die zu $\mathfrak{M}$ ähnlich und zur Summe $M + S + \mathfrak{S}N$ elementefremd ist. Zwischen den (hiernach elementefremden) geordneten Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}''$ gibt es also eine ähnliche Abbildung Φ, die jedem Element μ [2]) von M sein Bild $m'' \varepsilon M''$ zuordnet. Das Produkt $S \cdot M''$, das wegen $[S, M''] = 0$ nach Nr. 5 existiert, enthält dann lauter Elemente der Form $y = \{s, m''\}$, wo $s \varepsilon S$. Ferner sei $\varphi(x)$ gemäß Nr. 35 die Funktion, die jedem $m'' \varepsilon M''$ das vermöge Φ entsprechende $\varphi(m'') = \mu \varepsilon M$ zuordnet. Zu jedem Element m'' von M'' gehört dann die Menge m' derjenigen Paare $\{s, m''\}$, für die s ein Element der durch $\varphi(m'') \varepsilon M$ definierten geordneten Menge $\mathfrak{m}$ ist; $m' = \mathfrak{S}\varphi(m'') \cdot \{m''\} \notin S \cdot M''$ läßt sich nach Nr. 33 ähnlich zu $\mathfrak{m}$ ordnen und die zugehörige Ordnung μ' von m' ist eine Funktion $\chi(m'')$ von m''

---

[1]) Man vergleiche den in der Äquivalenztheorie entsprechenden Satz, dessen Beweise in Z., Nr. 28, und in I, Nr. 21, sich entsprechend dem hier durchgeführten Gedankengang wesentlich vereinfachen lassen.

[2]) So bezeichnet, weil μ eine Ordnung ist; entsprechend im folgenden.

und eine Teilmenge von $\mathfrak{U}(S \cdot M'')$. Ersetzt man jedes $m'' \varepsilon M''$ durch $\chi(m'') = \mu'$, so entsteht, während m'' die Elemente von M'' durchläuft, nach Nr. 7 eine Teilmenge M' von $\mathfrak{U}\mathfrak{U}(S \cdot M'')$. Sind m'' und m_0'' zwei verschiedene Elemente von M'', so sind die Mengen $\mathfrak{S}\chi(m'') = m'$ und $\mathfrak{S}\chi(m_0'') = m_0'$ nicht nur verschieden, sondern sogar zueinander sowie auch zu N elementefremd, da ihre Elemente die Form $\{\bar{s}, m''\}$ bezw. $\{\bar{s}, m_0''\}$ haben, wo $\bar{s} \varepsilon \mathfrak{S}\varphi(m'')$, $\bar{\bar{s}} \varepsilon \mathfrak{S}\varphi(m_0'')$ und (nach der Definition von $\mathfrak{M}''$) $\mathfrak{M}''$ elementefremd, sowohl zu S wie zu den Elementen von N ist. Die Elemente von M' sind also paarweise untereinander sowie zu N elementefremd.

Definiert man schließlich eine Ordnung M' von M' durch die Festsetzung, daß bei $m'' \overset{\mathfrak{M}''}{<} m_0''$ entsprechend $\chi(m'') \overset{\mathsf{M}'}{<} \chi(m_0'')$ gelten soll, so erhält man, da nach dem letzten Ergebnis jedenfalls $\chi(m'') \neq \chi(m_0'')$, nach Nr. 36 eine zu $\mathfrak{M}''$ und daher auch zu $\mathfrak{M}$ ähnliche geordnete Menge $\mathfrak{M}'$, die sämtlichen Bedingungen des Satzes genügt.

39. Ist $\mathfrak{M}$ eine geordnete Menge, deren Elemente Ordnungen von paarweise elementefremden Mengen sind, so gibt es eine einzige geordnete Menge $\mathfrak{A}$ von folgenden Eigenschaften:

1. $\mathfrak{A}$ enthält alle Elemente der Menge $\mathfrak{S}\mathfrak{S}M = A$ und nur sie (d. h. A entsteht durch Vereinigung der Mengen, deren Ordnungen in $\mathfrak{M}$ vorkommen);

2. sind a und a' zwei beliebige Elemente von A und gilt entweder in der geordneten Menge $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{S}M_{a \varepsilon \mathfrak{S}y} \overset{\mathfrak{M}}{<} \mathfrak{S}M_{a' \varepsilon \mathfrak{S}y}$ oder — falls diese beiden Mengen zusammenfallen — vermöge der Ordnung $\mathfrak{S}M_{a \varepsilon \mathfrak{S}y} = \mu$: $a \overset{\mu}{<} a'$, so ist $a \overset{\mathfrak{A}}{<} a'$ (d. h. die letzte Beziehung gilt, wenn entweder a zu einer Menge gehört, deren Ordnung in $\mathfrak{M}$ vor der Ordnung der a' enthaltenden Menge steht, oder wenn in der a und a' enthaltenden Menge m vermöge der in $\mathfrak{M}$ vorkommenden Ordnung μ von m: $a < a'$ gilt).

Der Beweis läßt sich, wenn man nicht auf die Nrn. 28/29 des vorigen Paragraphen zurückgreifen will, ohne grundsätzliche Schwierigkeit analog dem ersten Teil des Beweises in Nr. 36 durchführen. Man erhält nämlich die Elemente der gewünschten Ordnung A von A, indem man die Elemente jeder (als Element von $\mathfrak{M}$) gegebenen Ordnung μ jeweils mit der Summe der Vereinigungsmengen sämtlicher in $\mathfrak{M}$ auf μ folgenden Elemente vereinigt.

Man kann daher wie üblich festsetzen:

Definition 5. Die nach obigem Satz durch eine geordnete Menge $\mathfrak{M}$ von Ordnungen eindeutig bestimmte geordnete Menge $\mathfrak{A}$ heißt die geordnete Summe der durch die Elemente von $\mathfrak{M}$ definierten geordneten Mengen. Man schreibt $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}\mathfrak{M}$, was also nur einen Sinn hat, wenn $\mathfrak{M}$ *geordnet* ist und als Elemente nur *Ordnungen* (von paarweise elementefremden Mengen) besitzt; damit ist eine Verwechslung mit der Bezeichnung der ungeordneten Summe ausgeschlossen. Enthält $\mathfrak{M}$ nur zwei Ordnungen μ und μ' (zugehörige geordnete Mengen m und m') und ist $\mu \overset{\mathfrak{M}}{<} \mu'$, so bezeichnet man wie gewöhnlich $\mathfrak{S}\mathfrak{M}$ auch durch $\mathfrak{m} + \mathfrak{m}'$, usw.

Der Beweis des assoziativen Gesetzes für diese „Addition“ ist in üblicher Weise zu führen (vgl. *Hausdorff*, Mengenlehre, S. 76).

40. (*Hauptsatz der Addition geordneter Mengen.*) $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ seien ähnliche geordnete Mengen, deren Elemente Ordnungen von jeweils untereinander paarweise elementefremden Mengen darstellen (d. h. die Vereinigungsmengen der einzelnen Elemente von $\mathfrak{M}$ seien paarweise elementefremd, ebenso für $\mathfrak{N}$). Sind dann $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ aufeinander derart ähnlich abbildbar, daß je zwei entsprechende Elemente zwei einander ähnliche geordnete Mengen definieren, so sind die geordneten Summen $\mathfrak{S}\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{N}$ einander ähnlich.

Zum Beweis (vgl. den Beweis der Nr. 22 von I) werde zunächst angenommen, daß $\mathfrak{S}\mathfrak{S}M = A$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{S}N = B$ elementefremd seien. Ist Φ eine der Voraussetzung entsprechende ähnliche Abbildung zwischen den (auf Grund der gemachten Annahmen elementefremden) Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, so gibt es nach Nr. 35 eine Funktion $\varphi(x)$, die jedem Element μ von $\mathfrak{M}$ das vermöge Φ entsprechende $\varphi(\mu) = \nu \varepsilon \mathfrak{N}$ zuordnet, und nach Nr. 31 eine Funktion $\tau(x)$, die jedem $\mu \varepsilon \mathfrak{M}$ die Menge $\tau(\mu)$ aller ähnlichen Abbildungen zwischen den zu μ und $\varphi(\mu) = \nu$ gehörigen ähnlichen geordneten Mengen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ entsprechen läßt. Da nach Nr. 31 für jedes μ stets $\tau(\mu) \neq \mathfrak{U}(\mathfrak{S}\mu \cdot \mathfrak{S}\nu) \neq \mathfrak{U}(A \cdot B)$ ist, so existiert nach Nr. 7 eine Menge $\mathsf{H} \neq \mathfrak{U}\mathfrak{U}(A \cdot B)$, die alle jene (von 0 verschiedenen) Mengen $\tau(\mu)$ von ähnlichen Abbildungen und nur sie zu Elementen besitzt. Sind μ und μ' zwei beliebige Elemente von $\mathfrak{M}$, ν und ν' die (vermöge Φ) entsprechenden Elemente von $\mathfrak{N}$, so folgt aus $[\mathfrak{S}\mu, \mathfrak{S}\mu'] = [\mathfrak{S}\nu, \mathfrak{S}\nu'] = 0$, daß $\mathfrak{U}(\mathfrak{S}\mu \cdot \mathfrak{S}\nu)$ und $\mathfrak{U}(\mathfrak{S}\mu' \cdot \mathfrak{S}\nu')$ elementefremd sind, somit auch $\tau(\mu)$ und $\tau(\mu')$; H enthält also lauter paarweise elementefremde Mengen. Ein beliebiges Element θ des nach dem Auswahlaxiom von 0 verschiedenen Produkts $\mathfrak{P}\mathsf{H}$ (Nr. 5) enthält demnach je eine ähnliche Abbildung zwischen je zwei Mengen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}'$ und $\mathfrak{n}'$, usw.; daher ist $\mathfrak{S}\theta$ eine Abbildung zwischen den (ungeordneten) Mengen A und B. Schließlich stellt $\mathfrak{S}\theta$ aber eine ähnliche Abbildung zwischen den *geordneten* Summen $\mathfrak{S}\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{N} = \mathfrak{B}$ dar. Denn sind a und a' zwei beliebige Elemente von $\mathfrak{A}$, b und b' die vermöge $\mathfrak{S}\theta$ entsprechenden Elemente von $\mathfrak{B}$, so seien μ und μ' bzw. $\varphi(\mu) = \nu$ und $\varphi(\mu') = \nu'$ die Elemente von $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$, für die $a \varepsilon \mathfrak{S}\mu$, $a' \varepsilon \mathfrak{S}\mu'$, $b \varepsilon \mathfrak{S}\nu$, $b' \varepsilon \mathfrak{S}\nu'$ gilt. Ist dann etwa $a \overset{\mathfrak{A}}{<} a'$, so gilt nach Def. 5 entweder $\mu \overset{\mathfrak{M}}{<} \mu'$ oder $\mu = \mu'$ und $a \overset{\mu}{<} a'$. Im ersten Fall ist wegen der Natur von $\varphi(x)$ auch $\nu \overset{\mathfrak{N}'}{<} \nu'$; im zweiten Fall werden die Zuordnungen zwischen a und b sowie zwischen a' und b' durch die nämliche, der Menge $\tau(\mu)$ angehörige ähnliche Abbildung zwischen m und n vermittelt, so daß aus $a \overset{\mu}{<} a'$ auch $b \overset{\nu}{<} b'$ folgt. In beiden Fällen gilt also nach Def. 5 $b \overset{\mathfrak{B}}{<} b'$, w. z. b. w.

Sind endlich A und B *nicht* elementefremd, so bilde man gemäß Nr. 33 eine Hilfsmenge $\mathfrak{C}$, die zu $\mathfrak{A}$ ähnlich und zu $A + B$ elementefremd ist. Man braucht dann nur den Gedankengang des letzten Absatzes von Z., Nr. 30, im Sinn des soeben durchgeführten Beweises zu übertragen, um die Beziehung $\mathfrak{C} \simeq \mathfrak{B}$ zu gewinnen, aus der nach Def. 4 b (Nr. 34) das gewünschte Resultat $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$ folgt.

41. Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ elementefremde geordnete Mengen, so läßt sich das Produkt $M \cdot N = P$ derart ordnen, daß für irgend zwei Elemente $p = \{m, n\}$

und $p' = \{m', n'\}$ der entstehenden geordneten Menge $\mathfrak{P}$ $p \overset{\mathfrak{P}}{<} p'$ gilt, wenn entweder $m \overset{\mathfrak{M}}{<} m'$ oder — falls $m = m'$ — $n \overset{\mathfrak{N}}{<} n'$ ist.

Zum Beweis hat man nur nach Nr. 37 eine zu $\mathfrak{M}$ ähnliche geordnete Menge $\overline{\mathfrak{M}}$ zu bilden, deren Elemente Ordnungen darstellen und lauter zu $\mathfrak{N}$ ähnliche paarweise elementefremde geordnete Mengen der Form $\{m\} \cdot \mathfrak{N}$ (Nr. 33), wo $m \varepsilon \mathfrak{M}$, definieren. Die geordnete Summe $\mathfrak{S}\overline{\mathfrak{M}}$ (Nr. 39) stellt dann, wie nach der Schlußbemerkung von Nr. 37 leicht ersichtlich, die gewünschte Menge $\mathfrak{P}$ dar.

Man kann daher wie üblich festsetzen:

Definition 6. Die je zwei elementefremden geordneten Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ im obigen (unsymmetrischen) Sinn zugehörige geordnete Menge $\mathfrak{P}$ heißt das geordnete Produkt $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{M}$.

Die Ausdehnung auf mehr als zwei Faktoren wird sich in der Theorie der Wohlordnung aus einem allgemeineren Verfahren ergeben.

42. Ist $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{N}'$ und $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}] = [\mathfrak{M}', \mathfrak{N}'] = 0$, so ist auch $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}' \cdot \mathfrak{M}'$.

Stellt man nämlich in dem soeben angeführten Sinn $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{M}$ als $\mathfrak{S}\overline{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{N}' \cdot \mathfrak{M}'$ als $\mathfrak{S}\overline{\mathfrak{M}'}$ dar, so folgt die Ähnlichkeit der beiden geordneten Mengen aus dem Satze von Nr. 40.

§ 4. Über die abgezählten (und die geordneten endlichen) Mengen.

Dieser Paragraph soll lediglich eine erste Grundlage für die *spezielle* Theorie der wohlgeordneten Mengen liefern, wo dann erst die weitere Ausführung zu erfolgen hat. Die Theorie der (geordneten) *endlichen* Mengen bedarf bekanntlich [1]) zu ihrem Aufbau des „Axioms des Unendlichen“ (s. u.) und in weiten Grenzen auch des Auswahlaxioms *nicht* — ganz abgesehen von der Frage der Möglichkeit oder Zweckmäßigkeit ihrer Begründung durch die allgemeine Mengenlehre überhaupt. Die endlichen Mengen werden daher im folgenden (im Anschluß an das Axiom des Unendlichen) nur so weit behandelt, als es zur Übersichtlichkeit des Gedankengangs nützlich erscheint.

43. Axiom VII 1 (Nr. 2) reicht zusammen mit den Axiomen I—VI zwar für die *allgemeine* Mengenlehre hin, nicht aber um die Existenz spezieller, z. B. überhaupt unendlicher Mengen zu sichern (vgl. I, Nr. 27). Wie in Z. und in I soll daher *an Stelle von* VII 1 das folgende Axiom VII 2 zugrunde gelegt werden. Auch dieses reicht zwar noch nicht hin, um die unendlichen Mengen in dem erforderlichen Ausmaß zu sichern (vgl. I, Nr. 28), wohl aber in dem an dieser Stelle (und vielleicht in allen bis heute wesentlichen Teilen der Mengenlehre) benötigten Umfang; die Verstärkung des Axioms kann daher einer anderen Gelegenheit überlassen bleiben.

---

[1]) Für Literaturangaben vergleiche man den auch wegen seiner vielseitigen Behandlung des Gegenstandes bemerkenswerten Aufsatz Herrn *Tarskis* „Sur les ensembles finis“ in den Fundamenta Mathematicae, **6** (1924), 45—95.

Axiom VII 2. Es gibt eine Menge, und zwar mindestens eine Menge $\bar{Z}$ von der Eigenschaft, daß erstens die Nullmenge und zweitens zugleich mit jedem in $\bar{Z}$ vorkommenden Element a auch $\{a\}$ Element von $\bar{Z}$ ist. (Axiom des Unendlichen.)

Nach I, Nr. 29, gibt es eine einzige „kleinste" Menge Z dieser Art, die Teilmenge *jeder* derartigen Menge $\bar{Z}$ ist. $Z = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \ldots\}$ ist bis auf die Bezeichnung die Menge der natürlichen Zahlen [1]).

Bezeichnet man (vgl. I, § 4) mit *Dedekind* eine einer echten Teilmenge von sich äquivalente Menge als unendlich, jede andere Menge als endlich, so erweist sich jede Menge $\bar{Z}$ der obigen Art wie auch jede zu einer unendlichen Menge äquivalente Menge als unendlich (I, Nrn. 27 und 30). Insbesondere wird jede zu Z äquivalente Menge abzählbar unendlich genannt. Jede unendliche Menge besitzt eine abzählbar unendliche Teilmenge (I, Nr. 31) und jede unendliche Teilmenge einer abzählbar unendlichen Menge ist somit abzählbar.

Jedes von 0 *verschiedene Element* z' *von* Z *bestimmt eindeutig ein Element* z *von* Z, *für das* $z' = \{z\}$. Jedes Element von Z, ausgenommen 0, enthält also ein einziges Element. $z = \mathfrak{S} z'$ wird der *Vorgänger* von z', $z' = \{z\}$ der *Nachfolger* von z genannt (womit natürlich keine Ordnungsvorstellung zu verbinden ist, da Z eine ungeordnete Menge darstellt; vgl. Nr. 47, Fußnote).

Zum Beweis bedenke man nur, daß anderenfalls nach der Definition von Z schon die echte Teilmenge $Z - \{z'\}$ von Z die in Axiom VII 2 ausgedrückten Eigenschaften besäße. Die Eindeutigkeit folgt aus dem Axiom der Bestimmtheit.

Der Anschaulichkeit wegen wird für Elemente z von Z $\{z\}$ auch durch z^+ und (bei $z \neq 0$) $\mathfrak{S} z$ durch z^- bezeichnet, so daß z. B. $(z^+)^- = z$.

44. *Zu jedem Element* m *von* Z *gibt es eine einzige Menge* r_m *von folgenden Eigenschaften*:

1) $m^+ \varepsilon r_m$;

2) *ist* $x \varepsilon r_m$, *so ist auch* $x^+ \varepsilon r_m$;

3) *ist* $\bar{r}_m$ *eine Menge von den Eigenschaften* 1) *und* 2), *so ist* $r_m \subseteq \bar{r}_m$.

r_m *ist eine abzählbar unendliche Teilmenge von* Z, *ferner eine Funktion* $\varphi(m)$ *von* m *und enthält weder* 0 *noch* m *als Element.*

Beweis. R_m sei die Menge all der Teilmengen von Z, die die Eigenschaften 1) und 2) besitzen; ist also $M = (\mathfrak{U} Z)_{m^+ \varepsilon y}$ die Menge der m^+ enthaltenden Teilmengen von Z, so existiert R_m gemäß Nr. 6 als die Teilmenge derjenigen Elemente z von M, die für jedes $y \varepsilon z$ der Bedingung $y^+ \varepsilon z$ genügen. Dann hat auch der Durchschnitt $\mathfrak{D} R_m = r_m = \varphi(m)$ die Eigenschaften 1) und 2); denn ist $x \varepsilon r_m$ und $\bar{r}_m$ ein *beliebiges* Element von R_m, so ist nach der Definition von r_m stets $x \varepsilon \bar{r}_m$, also nach Eigenschaft 2) $x^+ \varepsilon \bar{r}_m$, somit $x^+ \varepsilon r_m$.

Ist $\bar{\bar{r}}_m$ eine beliebige (nicht gerade zu $\mathfrak{U} Z$ gehörige) Menge von den Eigenschaften 1) und 2), so besitzt bei der soeben getroffenen Konstruktion von r_m

[1]) In I steht (nach *Zermelos* Vorbild) Z statt hier $\bar{Z}$, Z_0 statt hier Z.

auch der Durchschnitt $d = \{r_m, \bar{\bar{r}}_m\}$ beide Eigenschaften. Nach jener Konstruktion ist daher (wegen $r_m \notin Z$) $d = r_m$, d. h. r_m ist eine Teilmenge von $\bar{\bar{r}}_m$; r_m besitzt also auch die Eigenschaft 3). Die eindeutige Bestimmtheit von r_m folgt aus 3).

r_m ist der echten Teilmenge $r_m - \{m^+\}$ äquivalent, also eine unendliche Menge, wie man durch Übertragung der Schlüsse von I, Nr. 30 (r_m statt Z) erkennt. r_m ist daher nach der vorigen Nr. (als Teilmenge von Z) abzählbar.

Jedes Element y von r_m, ausgenommen m^+, hat die Form $y = \{x\} = x^+$, wo $x \varepsilon r_m$; sonst besäße nämlich $r_m - \{y\}$ die Eigenschaften 1) und 2). Daher ist 0 kein Element von r_m. Ferner ist $r_m = r_{m^+} + \{m^+\}$; denn die rechtsstehende Summe besitzt, da $\{m^+\} \varepsilon r_{m^+}$, die Eigenschaften 1) und 2) und enthält somit r_m als Teilmenge; andererseits besitzt r_m die Eigenschaft 2) und enthält (wegen 1) und 2)) $\{m^+\}$ als Element, so daß r_{m^+} Teilmenge von r_m sein muß, eine Beziehung, die sich bei Hinzufügung des (ohnehin zu r_m gehörigen) Elements m^+ zu den Elementen von r_{m^+} nicht ändert.

Nicht ganz so einfach ist der Beweis der letzten Behauptung $m \notin r_m$, die nach dem vorigen Absatz darauf hinausläuft, daß niemals $r_m = r_{m^+}$ ist, m. a. W. daß r_m das Element m^+ nur auf Grund von 1), nicht aber als Nachfolger eines seiner Elemente gemäß 2) enthalten kann (man denke an eine zyklische Wiederkehr der Elemente). Der Beweis, daß $m \notin r_m$, kann entweder durch eine Abbildung zwischen Z und r_m, die 0 und m^+ einander zuordnet, oder direkt so erbracht werden: Jedenfalls gilt nicht für *alle* Elemente m von Z die Beziehung $m \varepsilon r_m$; z. B. enthält r_0 jedenfalls nicht das Element 0, da r_0 nach dem Beginn des vorigen Absatzes und 1) lauter Elemente der Form $\{x\}$ hat, wo $x \varepsilon Z$. Es sei $Z' = Z_{y \neq \varphi(y)} \subseteq Z$ die Menge derjenigen Elemente $y = m$ von Z, für die m in $\varphi(m) = r_m$ *nicht* auftritt; es ist z. B. $0 \varepsilon Z'$. Ist dann $Z - Z' \neq 0$, so gibt es mindestens ein Element z von Z', dessen Nachfolger z^+ nicht in Z', sondern in $Z - Z'$ vorkommt, so daß $z^+ \varepsilon r_{z^+}$ und nach dem vorigen Absatz $r_z = r_{z^+}$ ist; anderenfalls wäre ja Z' eine dem Axiom VII 2 genügende *echte* Teilmenge von Z, im Widerspruch mit Nr. 43. Ein solches Element z von Z' kann es aber nicht geben, da sonst schon eine echte Teilmenge von r_{z^+}, nämlich $r_{z^+} - \{z^+\} = r_z - \{z^+\}$ die Eigenschaften 1) und 2) (für $m = z^+$) besäße, im Widerspruch mit 3). Daher ist in der Tat $Z' = Z$, w. z. b. w.

45. *Zu jedem von* 0 *verschiedenen Element* m *von* Z *gibt es eine einzige Menge* a_m *von folgenden Eigenschaften* [1]):

1′) 0 *und* m^- *sind Elemente von* a_m;

2′) *ist* x *ein von* m^- *verschiedenes Element von* a_m, *so ist auch* x^+ *Element von* a_m;

3′) *ist* $\overline{a_m}$ *eine Menge von den Eigenschaften* 1′) *und* 2′), *so ist* $a_m \notin \overline{a_m}$.

a_m *ist eine endliche Teilmenge von* Z, *ferner eine Funktion von* m *und enthält* m *nicht als Element.*

---

[1]) **Natürlich könnten die Mengen a_m auch unabhängig von Z (d. h. unabhängig vom Axiom des Unendlichen) definiert werden.**

Für $m = 0$ *wird* $a_0 = 0$ *gesetzt.*

Der Beweis der Existenz und eindeutigen Bestimmtheit der Menge $a_m = \chi(m) \notin Z$ verläuft weitgehend entsprechend wie in der vorigen Nr. Für $m = 0^+$ ist $m^- = 0$, also $a_{0^+} = \{0\}$, während sonst a_m nach 1′) mindestens zwei verschiedene Elemente enthält. Ist $\overline{a_m}$ irgendeine Menge von den Eigenschaften 1′) und 2′) und ist $m \varepsilon \overline{a_m}$, so besitzt auch $a_m - \{m\}$ beide Eigenschaften, da aus $x^+ = m$ stets $x = m^-$ folgt; daher ist $m \notin a_m$.

Jedes von 0 verschiedene Element y von a_m hat die Form $y = x^+$, wo $x \varepsilon a_m$. Das leuchtet für $y \neq m^-$ wie in der vorigen Nr. unmittelbar ein. Es gilt aber auch für $y = m^-$, d. h. es ist auch $(m^-)^- \varepsilon a_m$. Es muß nämlich der (nach dem vorigen Absatz von a_m verschiedene) Durchschnitt $d = [a_{m^-}, a_m]$ mindestens ein Element x enthalten, dessen Nachfolger x^+ nicht in d vorkommt; denn sonst wäre nach Nr. 43 $Z \notin d$. Für jedes von $(m^-)^- \varepsilon a_{m^-}$ verschiedene Element von d gehört aber nach 2′) auch der Nachfolger zu d; daher ist $x = (m^-)^- \varepsilon d \notin a_m$. — Hieraus folgt entsprechend wie im vorletzten Absatz der vorigen Nr. $a_m \notin a_{m^-} + \{m^-\}$, $a_{m^-} \notin a_m - \{m^-\}$, also $a_m = a_{m^-} + \{m^-\}$. Dies gilt auch noch für $m = 0^+$.

Um schließlich die Endlichkeit der Menge a_m zu beweisen, bedenken wir, daß sie jedenfalls *für gewisse* m zutrifft, z. B. für $m = 0^+$, wo $a_{0^+} = \{0\}$ endlich ist (vgl. Nr. 9). Es sei $\overline{Z}$ die Menge der Elemente z von Z, für die $\chi(z) = a_z$ endlich ist; da eine Menge y dann und nur dann endlich ist, wenn für *jedes* Element x von $\mathfrak{U}y - \{y\}$ (d. h. für jede echte Teilmenge von y) die Menge aller Abbildungen zwischen x und y (Nr. 9) gleich der Nullmenge ist, so existiert $\overline{Z}$ nach Nr. 6. Wäre $Z - \overline{Z} \neq 0$, so müßte es nach Nr. 43 mindestens ein Element z_0 von $\overline{Z}$ geben, dessen Nachfolger in $Z - \overline{Z}$ vorkäme, so daß a_{z_0} endlich, $a_{z_0^+} = a_{z_0} + \{z_0\}$ unendlich wäre; im Gegensatz hierzu wäre dann aber nach Nr. 10, 2. Absatz $a_{z_0^+} \sim a_{z_0}$ und daher nach Nr. 43 auch a_{z_0} unendlich. Somit muß $\overline{Z} = Z$, also jedes a_{z_0} endlich sein.

46. Für jedes Element m von Z sind die in den beiden vorangehenden Nrn. definierten Mengen r_m und a_m elementefremd und es ist stets:

$$a_m + \{m\} + r_m = Z.$$

In der Tat enthält die links stehende Menge u. a. die Elemente $m = (m^-)^+$ und m^+, also zu jedem in ihr vorkommenden Element dessen Nachfolger. Da auch 0 in ihr vorkommt, so besitzt sie nach Nr. 46 die Teilmenge Z; da alle drei Summanden Teilmengen von Z sind, so ist die Summe gleich Z. Zum Beweis der ersten Behauptung des Satzes setzen wir den Durchschnitt $[r_m, a_m + \{m\}] = d$; die Komplementärmenge $Z - d$, in der z. B. 0 und m vorkommen, ist dann entweder $= Z$ oder sie enthält (Nr. 43) mindestens ein Element z von Z, dessen Nachfolger z^+ zu d gehört. Nach dem jeweils vorletzten Absatz der Nrn. 44 und 45 kommt aber der Vorgänger eines Elements, das gleichzeitig in r_m und $a_m + \{m\}$ auftritt und das daher von 0 und m^+ verschieden ist, sowohl in r_m wie in a_m vor, also auch in d; daher ist die zweite Alternative ausgeschlossen, also $d = 0$.

47. *Es existiert eine Menge* Z', *die alle in Nr. 44 definierten Mengen* r_m *und nur sie als Elemente enthält.* $\mathsf{Z} = \mathsf{Z}' + \{0, Z\}$ *stellt eine Ordnung von* Z *dar, bei*

der stets $m \overset{Z}{<} m^+$ *gilt, die „natürliche Ordnung der Zahlenreihe". Nach ihr ist* r_m *die zu* m *gehörige Endstrecke (Nr. 20),* a_m *die zu* m *gehörige Anfangsstrecke der durch* Z *definierten geordneten Menge* $\mathfrak{Z}$. *Jede von* 0 *verschiedene Teilmenge von* $\mathfrak{Z}$ *besitzt ein erstes Element.*

Die Existenz der Teilmenge Z' von $\mathfrak{U}Z$ folgert man nach Nr. 7, indem man in $\varphi(m) = r_m$ die Variable m alle Elemente von Z durchlaufen läßt. $Z = Z' + \{0, Z\}$ erfüllt die Grundbedingungen I und II (Nr. 11).

Zunächst ist nämlich von irgend zwei Elementen r_m und r_n von Z eines eine Teilmenge des anderen. Denn nach der vorigen Nr. ist entweder $n \varepsilon r_m$ oder $n \varepsilon (a_m + \{m\})$; im ersten Fall besitzt r_m nach Nr. 44 die Eigenschaften 1) und 2) von r_n, d. h. nach 3) ist $r_n \notin r_m$; im zweiten Fall ist, wenn nicht $m = n$ und $r_m = r_n$, genauer $n \varepsilon a_m$, so daß nach Nr. 45 die Menge a_{n+} und um so mehr ihre echte Teilmenge a_n Teilmengen von a_m sind, woraus nach der vorigen Nr. folgt: $r_m \notin r_n$.

Zum Nachweis, daß Z auch der Grundbed. II genügt, bezeichne r eine sonst beliebige Teilmenge von Z, die zusammen mit sämtlichen Elementen von Z die Grundbed. I erfüllt; zu zeigen ist: $r \varepsilon Z$. Von den beiden Fällen $0 \varepsilon r$ und $0 \notin r$ führt der erste auf $r = Z$, also sicher $r \varepsilon Z$; denn bei $0 \varepsilon r$ sind die — nach Nr. 44 das Element 0 nicht enthaltenden — Elemente r_m von Z *sämtlich* (nach Voraussetzung) Teilmengen von r, so daß r dem Axiom VII 2 genügt. Im Fall $0 \notin r$ dagegen enthält die Komplementärmenge $Z - r$ das Element 0; enthält sie auch zu jedem ihrer Elemente y den Nachfolger y^+, so ist sie nach Nr. 43 gleich Z, also $r = 0 \varepsilon Z$. Anderenfalls sei m ein Element von $Z - r$, dessen Nachfolger m^+ nicht zu $Z - r$, also zu r gehört (d. h. m ein beliebiges Element der — übrigens nur ein einziges Element enthaltenden — Menge $(Z - r)_{\{y\} \notin (Z - r)}$). Da r somit zwar m^+, nicht aber m enthält, ist r voraussetzungsgemäß eine echte Teilmenge der (beide Elemente enthaltenden) Menge r_{m^-} (Nr. 44), und ebenso die (auch m^+ *nicht* enthaltende) Menge r_{m+} eine echte Teilmenge von r. Nach Nr. 44 ist also

$$r \notin r_{m^-} - \{m\} = r_m, \quad r_m = r_{m+} + \{m^+\} \notin r,$$

d. h. $r = r_m \varepsilon Z$. In jedem Fall ist demnach $r \varepsilon Z$, d. h. Z ist in der Tat eine Ordnung von Z.

Da das Element r_m von Z nach Nr. 44 zwar m^+, nicht aber m als Element enthält, ist nach Def. 3 (Nr. 17) $m \overset{Z}{<} m^+$, und im besonderen die Nullmenge, die in keinem Element von Z außer in Z vorkommt, das erste Element der geordneten Menge $\mathfrak{Z}$.

Nach Nr. 23 ist r_m jedenfalls ein *Endstück* von $\mathfrak{Z}$ und enthält daher außer m^+ auch jedes auf m^+ folgende Element von $\mathfrak{Z}$. Ferner umfassen nach der Definition von r_m (Nr. 44) alle und nur die Elemente von $\mathfrak{Z}$, die m^+ enthalten, r_m als Teilmenge; hieraus folgt leicht, daß m^+ das erste Element der durch Z bestimmten (Nr. 26) zu r_m gehörigen geordneten Menge ist, und da für $r_{m^-} = r_m + \{m\}$ das Entsprechende gilt, so ist m^+ das auf m unmittelbar nachfolgende[1]) Element von $\mathfrak{Z}$ (Nr. 18). Daher ist r_m genauer die durch m bestimmte *Endstrecke* von $\mathfrak{Z}$, somit nach den Nrn. 25 und 46 a_m die durch m bestimmte Anfangsstrecke.

[1]) Damit erklären sich die Bezeichnungen „Nachfolger" und „Vorgänger".

Um schließlich in einer beliebigen von 0 verschiedenen (durch **Z** geordneten) Teilmenge $\mathfrak{Z}_1$ von $\mathfrak{Z}$ ein erstes Element nachzuweisen, bilde man gemäß Nr. 25 das zu $\mathfrak{Z}_1$ gehörige Anfangsstück $\mathfrak{Z}_0$ von $\mathfrak{Z}$. Ist $\mathfrak{Z}_0 = 0$, so ist nach dem vorletzten Absatz $0 \varepsilon \mathfrak{Z}_1$; dann ist 0 das erste Element von $\mathfrak{Z}_1$. Anderenfalls kann die jedenfalls 0 enthaltende Menge $\mathfrak{Z}_0$ nicht zu jedem ihrer Elemente y auch noch den Nachfolger y^+ enthalten; denn sonst wäre nach Nr. 43 $\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{Z}$, also $\mathfrak{Z}_1 = 0$. Es sei also z_0 ein Element von $\mathfrak{Z}_0$, dessen Nachfolger in $\mathfrak{Z}_0$ nicht vorkomme; z_0^+ muß daher, da es nach dem vorigen Absatz in $\mathfrak{Z}$ unmittelbar auf z_0 folgt, in $\mathfrak{Z}_1$ enthalten sein und ist somit das erste Element von $\mathfrak{Z}_1$.

Zum Schluß sei bemerkt, daß man gemäß den Nrn. 19 und 46 die zu **Z** *inverse* Ordnung von $\mathfrak{Z}$ dadurch enthält, daß man sämtliche Mengen a_m (Nr. 45) sowie Z selbst zu einer (ordnenden) Menge zusammenfaßt.

48. *Satz von der vollständigen Induktion*: Es sei m ein beliebiges Element von Z, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Funktionen; gilt dann erstens $\varphi(m) \varepsilon \psi(m)$ und folgt zweitens aus der Gültigkeit der Beziehung $\varphi(n) \varepsilon \psi(n)$, wo $n \varepsilon Z$, stets auch die Gültigkeit der Beziehung $\varphi(n^+) \varepsilon \psi(n^+)$, so gilt $\varphi(x) \varepsilon \psi(x)$ für jedes Element x der Menge $\{m\} + r_m$, also (nach der vorigen Nr.) für m und alle auf m folgenden Elemente von $\mathfrak{Z}$. — Der Satz bleibt auch noch gültig, wenn stets ε durch $\notin$ ersetzt wird.

In der Tat enthält die Menge $Z_{\varphi(x) \varepsilon \psi(x)}$ der Elemente von $\mathfrak{Z}$, für die obige Beziehung zutrifft, nach Voraussetzung m und mit jedem n auch n^+; nach Nr. 44 umfaßt sie daher die Menge $\{m\} + r_m$ als Teilmenge.

Bezeichnungen.

Die Ziffern verweisen auf die betreffenden Nr.

Abbildung 9
—, ähnliche 30
—, —, simultane 34
Addition (von Mengen) 1
— (von geordneten Mengen) 39
ähnlich 30, 34
äquivalent 9
Anfangsstrecke 23
Anfangsstück 23, 25
Aussonderungsmenge 1
Auswahlmenge 1
Axiome 1, 2, 8, 43
Bild 9, 30
$\mathfrak{D}$ 4
Durchschnitt 4
Element 1
elementefremd 1
Endstrecke 20
Endstück 23, 25
enthalten 1
erstes Element 18
Funktion 1
gleich 1
Grundbeziehungen 1
Grundbedingungen (I u. II) 11
Grunddefinition 11
inverse Ordnung 19
Komplementärmenge 3
M, M, $\mathfrak{M}$ 18
Menge 1
—, endliche, (abzählbar) unendliche 43
—, geordnete 18
—, monotone 11
nach(folgen) 17
Nachfolger, unmittelbarer 18
Nullmenge 3
Ordnung 11
$\mathfrak{P}$ 5
Paar 1
Potenzmenge 1
Produkt 5
—, geordnetes 41
$\mathfrak{S}$ 1, 39
Summe 1
—, geordnete 39
Teilmenge (echte) 1
—, geordnete 26
$\mathfrak{U}$ 1
Vereinigungsmenge 1
verschieden 1
vor(angehen) 17
Z. Einleitung
zugeordnet 9, 30, 34
I Einleitung
$=, \neq$ 1
$\varepsilon, \notin$ 1
$\notin$ 1
{ } 1
$+$ 1, 39
$-$ 3
$\cdot$ 5, 41
0 3
[ ] 4
$\sim$ 9
$<, >$ 17
$\simeq$ 30

Elementare Betrachtungen über gesetzmäßig aufgebaute Zahlverknüpfungen im Gebiete der rationalen Zahlen.

Von *Gerhard Stammler* in Halle.

Inhalt:

	Seite
I. Einleitung	159
§ 1. Voraussetzungen und Fragestellung	159
II. Verknüpfungen erster Ordnung	161
§ 2. Leitfaden zur Bildung von Verknüpfungen erster Ordnung	161
§ 3. Die Addition	162
III. Übergang zu Verknüpfungen höherer Ordnung	163
§ 4. Die Bedeutung der Grundgleichung (6)	163
§ 5. Reduzierungsregeln	164
IV. Die Verknüpfung zweiter Ordnung	166
§ 6. Anwendung der Reduzierungsregeln	166
§ 7. Struktur der Verknüpfung zweiter Ordnung	167
V. Verknüpfungen dritter Ordnung	169
§ 8. Anwendung der Reduzierungsregeln	169
§ 9. Diskussion der Restfälle	170
§ 10. Ergebnis	172

I. Einleitung.

In zwei Noten haben wir früher [1]) die Frage erörtert, ob im Gebiet der positiven ganzen Zahlen einschließlich Null sich Zahlenverknüpfungen finden lassen, die gesetzmäßig analog der Addition und der Multiplikation gebaut sind, ohne mit diesen selbst identisch sein zu müssen. Im nachstehenden wollen wir diese Untersuchungen auf das Gebiet der rationalen Zahlen ausdehnen. Da sich unterdes wesentliche Vereinfachungen der Beweise ergeben haben, sich auch manche Verschärfung in der Darstellung der begrifflichen und arithmetischen Grundlagen als wünschenswert herausstellten, sollen die betreffenden Überlegungen nicht nur ergänzend, sondern vollkommen ab ovo vorgetragen werden.

§ 1. Voraussetzungen und Fragestellung.

Den nachstehenden Untersuchungen legen wir das *Gebiet der rationalen Zahlen* $A, B, C, \ldots, \gtreqless 0$ zugrunde. Zahl bedeutet demnach im folgenden immer Rationalzahl.

[1]) Crelles Journal 154, II S. 114 ff. und 155, II S. 93 ff.

Unter einer *Zahlverknüpfung*

$$S_\lambda(A, B) = C \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

verstehen wir die Zusammenfassung zweier Zahlen zu einer dritten, in ihrem Wertwechsel von den verknüpften Zahlen abhängigen Zahl [1]). — Beispielsweise:

$A + B = C$; $A \cdot A - K \cdot \left(B + \frac{A}{B}\right) = C$, wo K eine feste Konstante bedeutet.

Eine Zahlverknüpfung nennen wir dann *widerspruchslos*, wenn gezeigt werden kann, daß in einer Untersuchung allein aus ihrer Verwendung nie die Gültigkeit von

$$A = B \quad \text{neben} \quad A \neq B$$

abgeleitet werden kann.

Eine Zahlverknüpfung nennen wir dann *trivial*, wenn als Werte für ihre Ergebnisse nur endlich viele Zahlen in Frage kommen, wie auch die verknüpften Zahlen gewählt werden mögen.

Wir stellen an jede weiterhin zu verwertende Zahlverknüpfung die *Forderung*, daß sie *widerspruchslos und nicht-trivial* sei. — Zahlverknüpfungen, für die diese Forderung nicht erfüllt ist, die also entweder widerspruchsvoll oder trivial sind, scheiden aus der ferneren Besprechung aus.

Wir setzen voraus, daß die vier Grundrechnungsarten (im Gebiet der Rationalzahlen) diesen Forderungen genügen [2]).

Wir fragen nun, für welche Werte von λ sich widerspruchslose und nicht-triviale Zahlverknüpfungen $S_\lambda(A, B) = C$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ *finden lassen, die nachstehenden Grundgleichungen genügen.*

(1) (*Existenz.*) Zu zwei Zahlen A und B soll es stets eine dritte Zahl geben, so daß

$$S_\lambda(A, B) = C$$

ist.

(2) (*Eindeutigkeit.*) Aus

$$S_\lambda(A, B) = C \quad \text{und} \quad S_\lambda(A, B) = C'$$

soll stets folgen:

$$C = C'.$$

(3) (*Faktorgleichheit.*) Bezeichnet K_μ eine Zahl derart, daß für jedes X

$$S_\mu(X, K_\mu) = X \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, so soll stets aus

$$S_\lambda(A, B) = S_\lambda(A, B')$$

$$B = B'$$

folgen, sobald für jedes $\mu < \lambda$, für das ein K_μ existiert,

---

[1]) Wir nennen im folgenden gelegentlich λ den *Verknüpfungsindex.* Er gibt die *Ordnung* der Verknüpfung an.

[2]) Zur späteren Anwendung führen wir die *reduzierte Darstellung* einer Rationalzahl A folgendermaßen ein:

$$A = \frac{a}{a'};\ a,\ a' \text{ ganzzahlig};\ a \geqq 0;\ a' \neq 0.$$

$$A \neq K_\mu$$

ist.

Bemerkung: Existiert kein K_μ für $\mu < \lambda$, so folgt hiernach ohne weiteres aus

$$S_\lambda(A, B) = S_\lambda(A, B')$$
$$B = B' \text{ [1]}.$$

(4) (*Assoziatiativät.*) Es ist

$$S_\lambda(A, S_\lambda(B, C)) = S_\lambda(S_\lambda(A, B), C).$$

(5) (*Kommutativität.*) Es ist

$$S_\lambda(A, B) = S_\lambda(B, A) \text{ [2]}.$$

(6) (*Distributivität.*) Zu zwei Verknüpfungsindizes λ und $\mu < \lambda$ soll es stets drei von diesen in ihrem Wert abhängige[3]) φ, ψ, χ geben, so daß die Gleichung gilt:

$$S_\lambda(A, S_\mu(B, C)) = S_{\varphi(\lambda,\mu)}(S_{\psi(\lambda,\mu)}(A, B), S_{\chi(\lambda,\mu)}(A, C)).$$

II. Verknüpfungen erster Ordnung.

§ 2. Leitfaden zur Bildung von Verknüpfungen erster Ordnung.

Wenn wir an Hand der Grundgleichungen **(1)** bis **(6)** eine Kette von Zahlverknüpfungen im Gebiete der Rationalzahlen herstellen wollen, so bemerken wir zunächst, daß für den Wert $\lambda = 1$, also für die Verknüpfung erster Ordnung nur die Grundgleichungen **(1)** bis **(5)** in Frage kommen. Denn das in **(6)** angenommene $\mu < \lambda$ existiert ja für $\lambda = 1$ nicht als Verknüpfungsindex.

Bei der Konstruktion einer Verknüpfung erster Ordnung sind wir demnach an sich durch nichts anderes gebunden, als durch das Gebot der Widerspruchsfreiheit und Nicht-Trivialität bei Anwendung von **(1)** bis **(5)**. Als Leitfaden für die Bildung einer solchen Verknüpfung bedienen wir uns nun folgender Überlegung:

Es sei A eine bestimmte rationale Zahl, X eine Veränderliche, deren Bereich das Gebiet der rationalen Zahlen ist. Dann betrachten wir

$$S_1(A, X) = Y.$$

Y muß nun so bestimmt werden, daß die Anwendung von **(1)** bis **(5)** nicht zu Widersprüchen oder Trivialitäten führt.

Damit **(1)** gelte, muß zu jedem X mindestens ein Y, damit **(2)** gelte, zu jedem X nur ein Y bestimmt werden. Um **(3)** zu erfüllen, darf nicht dasselbe Y als Verknüpfungsresultat von A mit verschiedenen X erscheinen. **(5)** sodann kommt bei festem A nur für den Fall $X = A$ in Frage und wird stets durch die Identität erfüllt:

$$S_1(A, A) = S_1(A, A).$$

---

[1]) Das gilt insbesondere für $\lambda = 1$, da S_0 also ein K_0 nicht existiert.

[2]) Nun läßt sich auch zeigen, daß, wenn für eine Verknüpfung S_μ ein K_μ existiert, nur ein solches existiert. Angenommen nämlich, es gäbe noch eine Zahl K'_μ, so daß auch bei K'_μ für jedes C $S_\mu(C, K'_\mu) = C$ wäre, so folgte

$$K_\mu = S_\mu(K_\mu, K'_\mu) = S_\mu(K'_\mu, K_\mu) = K'_\mu.$$

[3]) Über die Rolle der φ, ψ, χ vergl. später § 4.

Die Grundgleichung **(4)** endlich kann nur für einen solchen Wert X' in Frage kommen, der mit einem $Y'' = S_1(A, X'')$ übereinstimmt. Setzen wir nun $S_1(A, X') = Y'$, so wird nach **(4)**

$$Y' = S_1(A, S_1(A, X'')) = S_1(S_1(A, A), X'').$$

Für alle Verknüpfungen mithin, für die $S_1(A, A) = A' \neq A$ gesetzt wird, liefert die Bestimmung der Verknüpfung mit A gleichzeitig Bestimmungen über Verknüpfungen mit einer von A verschiedenen Zahl A'. Ob diese Bestimmungen der Verknüpfungen mit A' sich auf den gesamten Bereich der rationalen Zahlen erstrecken, ob also durch $S_1(A, X)$ auch $S_1(A', X)$ in seinem ganzen Umfang bestimmt wird, hängt davon ab, ob die Y den gesamten Wertevorrat der rationalen Zahlen erschöpfen oder nicht. Ist das erste für A der Fall, so gilt nach der obigen Relation das gleiche auch für die Resultate der Verknüpfungen mit A'. Es ergeben sich von hier aus weitere Möglichkeiten, die wir nicht weiter verfolgen wollen.

§ 3. Die Addition.

Aus dem Bisherigen geht hervor, daß sich die Verknüpfungen erster Ordnung in zwei Klassen einteilen lassen:

(I.) für mindestens ein A ist $S_1(A, A) = A$.

(II.) es ist stets $S_1(A, A) \neq A$.

Für die Verknüpfungen der Klasse (I) gelten nun folgende Erwägungen:

Ist $S_1(A, A) = A$, so kann nicht zugleich für ein $B \neq A$ die analoge Gleichung $S_1(B, B) = B$ gelten. Denn daraus ergäbe sich:

$$S_1(A, B) = S_1(S_1(A, A), B) = S_1(A, S_1(A, B)),$$

und andererseits

$$S_1(A, B) = S_1(A, S_1(B, B)) = S_1(S_1(A, B), B),$$

folglich

$$S_1(S_1(A, B), A) = S_1(S_1(A, B), B), \quad \text{d. i.} \quad A = B, \quad \text{gegen} \quad A \neq B.$$

Ferner ist hierbei für jedes B:

$$\begin{aligned} S_1(A, B) &= S_1(S_1(A, A), B) \\ &= S_1(A, S_1(A, B)), \quad \text{also} \quad B = S_1(A, B). \end{aligned}$$

Daher können wir sagen: *Wenn es in einer Verknüpfung erster Ordnung eine Zahl A gibt, für die $S_1(A, A) = A$ gesetzt wird, so ist diese Zahl die einzige dieser Art und sie ist zugleich die Verknüpfungskonstante K_1 der betreffenden Verknüpfung.*

Umgekehrt ist nach **(3)**: $S_1(K_1, K_1) = K_1$.

Sonach stimmt die am Eingang dieses Paragraphen gegebene Einteilung der Verknüpfungen erster Ordnung mit der folgenden überein:

(I.) es existiert eine Zahl K_1;

(II.) es existiert keine Zahl K_1.

Unter Hintanstellen der anderen Möglichkeiten nehmen wir für unsere fol-

genden Untersuchungen als Verknüpfung erster Ordnung die gewöhnliche Addition

$$S_1(A, B) = A + B$$

an. Damit ist zugleich die Widerspruchsfreiheit und Nicht-Trivialität der verwendeten Verknüpfung erster Ordnung angenommen. Es existiert dann also $K_1 = 0$.

III. Übergang zu Verknüpfungen höherer Ordnung.

§ 4. Die Bedeutung der Grundgleichung (6).

Wir versuchen jetzt zu der Verknüpfung erster Ordnung eine zweiter Ordnung hinzuzufügen. Würden wir diese Verknüpfung zu konstruieren versuchen, ohne darauf Rücksicht zu nehmen, ob sich die verknüpften Zahlen als Ergebnisse der Verknüpfung erster Ordnung darstellen lassen, so würden wir lediglich bei gutem Glück nicht mit Grundgleichung **(6)** in Widerspruch geraten. Nehmen wir nämlich an, wir hätten — etwa analog dem eben über S_1 Gesagten — eine Verknüpfung zweiter Ordnung für ein festes A und die Variable X konstruiert, die **(1)** bis **(5)** genügte, so müssen wir nunmehr zusehen, ob sich diese Konstruktion auch dann aufrechterhalten läßt, wenn $X = S_1(A', B')$ gesetzt werden kann. — So genügt z. B. folgende Verknüpfung — jetzt als Verknüpfung zweiter Ordnung gedeutet — allen Anforderungen von **(1)** bis **(5)**: $S_2(A, B) = A + B + K$, wobei K eine Konstante ist. Ob sie aber auch mit **(6)** in Einklang zu bringen ist? Diese Frage läßt sich nun so auffassen, daß man untersucht, ob für $\lambda = 2$ und $\mu = 1$ die $\varphi_{(\lambda, \mu)}$, $\psi_{(\lambda, \mu)}$, $\chi_{(\lambda, \mu)}$ Werte annehmen, welche eine widerspruchsfreie und nicht-triviale Entwicklung des eben angeführten S_2 in Verbindung mit S_1 gestatten [1]).

Und allgemein: Nehmen wir an, es seien uns für ein bestimmtes $\lambda (= 2, 3, \ldots)$ sämtliche Verknüpfungen von S_1 bis $S_{\lambda-1}$ gegeben. Wir wollen S_λ konstruieren. Dann sind die Gleichungen **(1)** bis **(5)** im wesentlichen Bestimmungen, die sich lediglich auf S_λ stützen; mit Ausnahme der Bezugnahme auf die etwaige Existenz der K_μ in **(3)**. Die Grundgleichung **(6)** dagegen setzt S_λ mit der Gesamtheit aller vorhergegangenen S_μ in Beziehung, dadurch, daß sie auch $\mu < \lambda$ als unabhängige Variable in die funktionale Bestimmung des Resultates von S_λ einführt. Dadurch wird die Wichtigkeit der Grundgleichung **(6)** für unsere folgenden Überlegungen klargestellt.

Es fragt sich nun, ob wir den φ, ψ, χ in Grundgleichung **(6)** ganz nach Belieben ganzzahlige positive Werte > 0 zuschreiben können. Das ist nicht der Fall. Vielmehr ist das Mindestmaß an Forderungen, wieweit der Wertvorrat der φ, ψ, χ sich erstrecken darf, in den beiden folgenden Sätzen gegeben:

(6 a) Keines der φ, ψ, χ soll $> \lambda$ sein; und außerdem:

(6 b) mindestens eines der φ, ψ, χ soll $< \lambda$ sein.

Diese Einschränkungen sind, wie eine kurze Überlegung zeigt [2]), notwendig, um logische Unmöglichkeiten auszuschließen.

---

[1]) Daß dies nicht der Fall ist, zeigen die Entwicklungen von §§ 6 ff.

[2]) Würden wir **(6 a)** fortlassen, so hätten wir in dem dann auftretenden $S_\varkappa (\varkappa > \lambda)$ eine uns gänzlich unbekannte und in nichts bestimmte Verknüpfung. Ihr Verhalten gegenüber Verknüpfungen

Demnach kommen für diese Funktionen φ, ψ, χ bei jeder Untersuchung über das Verhalten eines S_λ gegenüber einer Verknüpfung niedrigerer Ordnung stets alle Variationen zu 3 (mit Wiederholung) der Zahlen 1, 2, 3, . . ., λ in Frage; dabei ist lediglich das Tripel $(\lambda, \lambda, \lambda)$ ausgeschlossen. Diese Reihe von Tripeln ist nun bei gleichbleibendem λ für jedes $\mu < \lambda$ aufzustellen. Die Gesamtheit der Möglichkeiten, ein S_λ in seinem Verhalten gegenüber allen Verknüpfungen niedrigerer Ordnung auf Grund von **(6)**, **(6a)** und **(6b)** zu bestimmen, ergibt sich sonach, indem man jedes Glied aus der Reihe der Tripel für ein bestimmtes μ mit jedem Glied der Reihen aller anderen μ zusammenstellt. $(\mu = 1, 2, \ldots, \lambda - 1)$. Die Anzahl dieser Möglichkeiten wird mithin selbst für kleinere Werte von λ verhältnismäßig groß [1]).

Die Untersuchung der Bestimmtheit eines S_λ würde daher recht umständlich werden, wenn jede Kombination wieder in gleicher Weise auf Widerspruchslosigkeit und Nicht-Trivialität hin untersucht werden sollte. Daher erscheint es zweckmäßig, folgende allgemeinen Regeln aufzustellen, die die Zahl der zu untersuchenden Kombinationen dadurch vermindern, daß sie bei einigen ohne viele Umstände sofort die Trivialität oder den in ihnen enthaltenen Widerspruch erkennen lassen.

§ 5. Reduzierungsregeln.

Regel I. *In jeder Reihe der φ, ψ, χ für ein bestimmtes μ (bei gegebenem λ) sind diejenigen Tripel φ', ψ', χ' und $\varphi'', \psi'', \chi''$ miteinander identisch* [2]), *für die $\varphi' = \varphi'', \psi' = \chi'', \chi' = \psi''$ ist.*

Beweis: Es ist

$$S_\lambda(A, S_\mu(B, C)) = S_{\varphi'}(S_{\psi'}(A, B), S_{\chi'}(A, C)) = S_{\varphi'}(S_{\chi'}(A, C), S_{\psi'}(A, B))$$
$$= S_{\varphi''}(S_{\psi''}(A, C), S_{\chi''}(A, B)) = S_\lambda(A, S_\mu(C, B)).$$

Wir können also stets die Resultate beider Bestimmungen (über das Verhalten von S_λ gegenüber S_μ) identisch ineinander überführen.

Regel II. *Gegeben sei eine Bestimmung φ, ψ, χ. Wir bezeichnen durch τ den einen, durch τ' den andern der beiden Werte ψ oder χ. Es existiere für das die φ, ψ, χ bestimmende S_μ die Zahl K_μ. Dann ist*

$$S_\tau(A, K_\mu) = S_\tau(B, K_\mu)$$

für alle diejenigen A und B, die zu jedem existierenden K_ν $(\nu < \varphi)$ in der Beziehung stehen:

---

niedrigerer Ordnung, insbesondere gegenüber S_λ, wäre dann zu bestimmen, bevor wir S_λ in seinem Verhalten gegenüber allen $S_\mu(\mu < \lambda)$ bestimmen und dadurch erst sichern könnten. Wir könnten dann also in den logischen Zirkel hineingeraten, S_λ durch $S_\varkappa$ und $S_\varkappa$ durch S_λ bestimmen zu müssen. Davor kann uns nur **(6a)** schützen.

Ebenso liegt die Sache bei **(6b)**. Der Fortfall dieser Forderung würde uns dazu nötigen, das unbekannte S_λ zu seiner Bestimmung als bereits bekannt vorauszusetzen.

[1]) Ihr Wert ist nach einem bekannten Satz der Kombinatorik: $(\lambda^3 - 1)^{\lambda - 1}$.

[2]) d. h., ob das Verhalten von S_λ gegenüber S_μ nach φ', ψ', χ' oder nach $\varphi'', \psi'', \chi''$ bestimmt wird, ist ohne Einfluß auf das Resultat.

$$S_{\tau'}(A, B) \neq K_\nu.\ ^{1})$$

Beweis: Es ist

$$S_\lambda(A, B) = S_\lambda(A, S_\mu(B, K_\mu)) = S_\varphi(S_\psi(A, B), S_\chi(A, K_\mu)) \qquad (a)$$
$$S_\lambda(A, B) = S_\lambda(S_\mu(A, K_\mu), B) = S_\varphi(S_\psi(A, B), S_\chi(K_\mu, B)) \qquad (a')$$
$$S_\lambda(A, B) = S_\lambda(A, S_\mu(K_\mu, B)) = S_\varphi(S_\psi(A, K_\mu), S_\chi(A, B)) \qquad (b)$$
$$S_\lambda(A, B) = S_\lambda(S_\mu(K_\mu, A), B) = S_\varphi(S_\psi(K_\mu, B), S_\chi(A, B)) \qquad (b')$$

Aus Vergleichung von (a) und (a') ergibt sich die Richtigkeit der behaupteten Regel für $\tau = \chi$, $\tau' = \psi$; aus (b) und (b') für $\tau = \psi$, $\tau' = \chi$.

Regel III. *Gegeben seien zwei Werte $\mu \neq \mu'$. Ist nun für irgendein Paar B, C: $S_\mu(B. C) \neq S_{\mu'}(B, C)$, so darf nicht zugleich:*

$$\varphi(\lambda, \mu) = \varphi(\lambda, \mu'),\ \psi(\lambda, \mu) = \psi(\lambda, \mu'),\ \chi(\lambda, \mu) = \chi(\lambda, \mu'),$$

sein [2]).

Beweis: Wäre die Behauptung unrichtig, so ergäbe sich für alle A, B, C:

$$S_\lambda(A, S_\mu(B, C)) = S_\varphi(S_\psi(A, B), S_\chi(A, C)) = S_\lambda(A, S_{\mu'}(B, C)).$$

Wählen wir hier nun ein $A \neq K_\nu (\nu < \lambda)$, so wäre für alle B und C

$$S_\mu(B, C) = S_{\mu'}(B, C)$$

gegen die Voraussetzung.

Regel IV. *Existiert K_μ für $\mu < \lambda$, so ist stets*

$$S_\lambda(A, K_\mu) = S_\varphi(S_\psi(A, K_\mu), S_\lambda(A, K_\mu)).$$

Beweis: Es ist

$$S_\lambda(A, K_\mu) = S_\lambda(A, S_\mu(K_\mu, K_\mu)) = S_\varphi(S_\psi(A, K_\mu), S_\chi(A, K_\mu)).$$

Der Grundgedanke, den wir bei der Untersuchung von Verknüpfungen höherer Ordnung anwenden, ist ein ähnlicher, wie wir ihn bereits bei der Verknüpfung erster Ordnung als Leitfaden benutzten. Wir betrachten nämlich für ein gewisses A (bei gegebenen λ) seine Verknüpfung mit Werten der Variabeln X:

$$S_\lambda(A, X) = Y.$$

Nur nehmen wir jetzt an, daß sich X als Ergebnis einer Verknüpfung niedrigerer Ordnung darstellen lasse. Daher betrachten wir in erster Linie die nach

---

[1]) Es läßt sich nun immer mindestens *ein* Paar $A \neq B$ angeben, das der Bedingung genügt:

$$S_\tau'(A, B) \neq \text{jedem } K_\nu \quad (\nu < \varphi).$$

Zum Beweise wähle wir $A \neq$ jedem $K_{\nu'}$ $(\nu' < \max(\nu, \tau'))$. Dann kann nach (3.) zu jedem $\nu = 1, 2, \ldots \varphi$ höchstens *ein* B_ν existieren, so daß

$$S_\tau'(A, B_\nu) = K_\nu$$

ist. Es können also höchstens φ Zahlen B_ν in Frage kommen, für die

$$S_\tau'(A, B_\nu) = \text{irgendeinem } K_\nu$$

angenommen werden könnte. Wählen wir nun ein $B \neq$ allen B_ν und außerdem $\neq A$, so gilt für dieses stets existierende Paar $A \neq B$:

$$S_\tau'(A, B) \neq \text{jedem } K_\nu.$$

[2]) Diese Regel kommt also nur für $\lambda \geqq 3$ in Betracht. Sie vergleicht dann die Tripel der für die verschiedenen μ aufzustellenden Reihen der φ, ψ, χ.

(6), (6a) und **(6b)** möglichen Bestimmungen dieses S_λ gegenüber Verknüpfungen niedrigerer Ordnung und suchen festzustellen, welche von den hiernach zulässigen Werten der φ, ψ, χ Widerspruchslosigkeit und Nicht-Trivialität von S_λ gewähren, wenn gleichzeitig **(1)—(5)** angewendet werden.

Diese Untersuchung zerfällt jedesmal in zwei Teile: Erstens lassen die Regeln I—IV, wie wir sehen werden, sofort einige Werttripel der φ, ψ, χ für ein bestimmtes μ, — oder gewisse Kombinationen von Tripeln für mehrere μ — als widerspruchsvoll oder trivial erkennen. Diese scheiden dann aus. Den zweiten Teil der Besprechung nehmen die Fälle ein, die sich nicht so unmittelbar erledigen lassen, sondern deren Widerspruchsfülle oder Trivialität — oder Widerspruchsfreiheit und Nicht-Trivialität — eines für sie besonders ausgeführten Beweises bedarf.

Nach diesem Plan behandeln wir zunächst die Verknüpfung zweiter Ordnung.

IV. Die Verknüpfung zweiter Ordnung.

§ 6. Anwendung der Reduzierungsregeln.

Aus den Grundgleichungen **(6), (6a), (6b)** ergeben sich für $\lambda = 2$ und $\mu = 1$ folgende Wertmöglichkeiten für die φ, ψ, χ:

	I_σ	II_σ	III_σ	IV
φ	σ	σ	σ	1
ψ	1	1	2	2
χ	1	2	1	2

($\sigma = 1$ oder 2)

Aus Regel I ergibt sich sofort die Identität von II_σ und III_σ, so daß wir fernerhin nur noch den einen von beiden, etwa II_σ zu berücksichtigen brauchen.

Regel II können wir auf I_σ und II_σ, wie folgt, anwenden: Wir setzen jedesmal $\tau = \psi = 1$. Dann folgt aus Regel II, daß diese Entwicklungen für das — nach Anm. 1 S. 165 — stets existierende Paar $A \neq B$, das (für alle existenten $K_\nu (\nu < \varphi)$) die Bedingung $S_{\tau'}(A, B) \neq K_\nu$ erfüllt, die Gleichung geben würden:

$$S_1(A, K_1) = S_1(B, K_1), \qquad \text{d. i.} \qquad A = B,$$

also einen Widerspruch.

Daher bleibt nur noch das Tripel IV: (1; 2; 2) übrig.

Bei diesem Fall läßt Regel II — wie wir auch τ und τ' wählen mögen — nur erkennen

$$S_2(A, 0) = S_2(B, 0)$$

für alle die Paare, für die $S_2(A, B) \neq 0$ ist. — Sie nutzt also hier wenig.

Regel IV dagegen ergibt:

$$S_2(A, 0) = S_1(S_2(A, 0), S_2(A, 0))$$

oder, wenn wir $S_2(A, 0) = W$ setzen:

$$S_1(W, 0) = S_1(W, W)$$

und daraus folgt nach **(3)**: $W = 0$, d. h.

$$S_2(A, 0) = 0 \text{ für jedes } A.$$

Damit ist die Anwendung der Regeln erschöpft. Wir durften auch nicht erwarten, bei dem Tripel *IV* einen Widerspruch oder Trivialität allgemein zu erhalten. Denn gerade die Kombination (1; 2; 2) ist es ja, die der als widerspruchsfrei angenommenen Multiplikation zugrunde liegt, wie die Formel

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C) = S_1(A \cdot B, A \cdot C)$$

erkennen läßt. Es fragt sich nun, ob die Multiplikation, die sonach eine Verknüpfung zweiter Ordnung *vom Typus des Tripel IV* ist, die einzige dieser Art ist. Eine der hervorstechendsten Eigenschaften der Multiplikation ist bekanntlich die Gleichung $1 \,.\, X = X$ für jedes X. Die Frage ist also die, ob jede Verknüpfung zweiter Ordnung *vom Typus* (1; 2; 2) der Gleichung genügt:

$$S_2(1, X) = X \,.$$

§ 7. Struktur der Verknüpfung zweiter Ordnung.

Wie wichtig die Verknüpfung $S_2(X, 1)$ zur Erkenntnis der Struktur von $S_2(A, B)$ ist, zeigt folgender Satz:

Für jedes A und jedes B ist

(*) $$S_2(A, B) = S_2(A \cdot B, 1).$$

Da nun $A \cdot B$ stets irgendeine Rationalzahl X' ist, so besagt der Satz nicht weniger, als daß wir sämtliche Verknüpfungen $S_2(A, B)$ bestimmt haben, wenn wir $S_2(X, 1)$ für jedes X festgelegt haben.

Wir beweisen diesen Satz sukzessive. Zunächst:

(**) $$S_2(A, n \cdot B) = S_2(n \cdot A, B),$$

wobei n eine ganze Zahl bedeutet.

Der Satz (**) ist richtig für $n = 0$ und $n = 1$. Im ersten Falle nämlich nimmt er die Form an: $S_2(A, 0) = S_2(0, B) = 0$, im zweiten Falle: $S_2(A, B) = S_2(A, B)$. Angenommen nun, er gelte für ein bestimmtes $n \geqq 0$, so folgt daraus seine Gültigkeit für $n + 1$:

$$\begin{aligned} S_2(A, (n+1) \cdot B) &= S_2(A, S_1(n \cdot B, B)) = S_1(S_2(A, n \cdot B), S_2(A, B)) \\ &= S_1(S_2(n \cdot A, B), S_2(A, B)) = S_2(S_1(n \cdot A, A), B) \\ &= S_2((n+1) \cdot A, B). \end{aligned}$$

Mithin gilt (**) für jedes $n \geqq 0$.

Fernerhin folgt aus

$$S_2(A, (n+1) \cdot B) = S_2((n+1) \cdot A, B):$$
$$S_1(S_2(A, n \cdot B), S_2(A, B)) = S_1(S_2(n \cdot A, B), S_2(A, B)),$$

also nach **(3)**:

$$S_2(A, n \cdot B) = S_2(n \cdot A, B).$$

Bedeutet n eine ganze Zahl $\leqq 0$, so zeigt diese Deduktion, daß (**) auch für negative ganze Zahlen gilt.

Ganz ähnlich folgt durch den Schluß von n auf $n + 1$ und durch den von

$n + 1$ auf n, daß für alle $n \gtreqless 0$ gilt:

$$(^{**}_{*}) \qquad S_2(A, n \cdot B) = n \cdot S_2(A, B).$$

Um nun (*) allgemein zu beweisen, entwickeln wir unter Berücksichtigung von $(^{**}_{*})$[1]):

$$a' \cdot S_2(A, B) = S_2(a' \cdot A, B) = S_2(a, B) = S_2(B, a).$$

Andererseits ist nach $(^{**}_{*})$ und (**):

$$a' \cdot S_2(A \cdot B, 1) = S_2((a' \cdot A) \cdot B, 1) = S_2(a \cdot B, 1) = S_2(B, a).$$

Mithin ist:

$$a' \cdot S_2(A, B) = a' \cdot S_2(A \cdot B, 1).$$

Da nun stets $a' \neq 0$ ist, so folgt für jedes A und B:

$$S_2(A \cdot B) = S_2(A \cdot B, 1).$$

Aus $(^{**}_{*})$ ergibt sich ferner für jedes X, x und x' [1]):

$$x' \cdot S_2(X, 1) = S_2(x' \cdot X, 1) = S_2(x, 1) = x \cdot S_2(1, 1) = x' \cdot X \cdot S_2(1, 1).$$

Folglich ist

$$S_2(X, 1) = X \cdot S_2(1, 1).$$

Setzen wir diesem Ergebnis $X = A \cdot B$, in so nimmt unser Hauptsatz (*) die Gestalt an:

$$S_2(A \cdot B) = A \cdot B \cdot S_2(1, 1).$$

Um also die Werte sämtlicher Verknüpfungen $S_2(A, B)$ zu bestimmen, brauchen wir nur den Wert von $S_2(1, 1)$ festzulegen. Man sieht hieraus sofort, daß nicht $S_2(1, 1) = 0$ gesetzt werden darf, da sonst $S_2(A, B)$ trivial werden würde. Nehmen wir dies an, so können wir sagen, daß die Verknüpfung zweiter Ordnung identisch ist mit der Multiplikation des Produktes der verknüpften Zahlen mit einem konstanten Faktor. Von der Bestimmung dieser Konstanten hängt somit nur der zahlenmäßige Wert der Verknüpfung zweiter Ordnung ab. Ihr gesetzmäßiger Aufbau stützt sich vollkommen und ausschließlich auf den der Multiplikation.

Daher ist die so erhaltene Verknüpfung zweiter Ordnung widerspruchsfrei und nicht-trivial.

Die Multiplikation ist darum nur eine unter unendlich vielen, ihrem Zahlenwert nach verschiedenen Möglichkeiten, zwei Zahlen nach den Gesetzen der Verknüpfung zweiter Ordnung zu verknüpfen.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß zu jeder dieser Möglichkeiten ein K_2 existiert, — wie wir auch $S_2(1, 1)$ bestimmen. Damit nämlich für jedes X

$$S_2(X, K_2) = X \cdot K_2 \cdot S_2(1, 1) = X$$

werde, brauchen wir nur $K_2 = \dfrac{1}{S_2(1, 1)}$ zu setzen. Diese Zahl existiert nun im betrachteten Bereich immer, folglich auch $K_2 \neq 0$.

---

[1]) Über die Bedeutung von A, a und a' (sowie von X, x, x'), vgl. Anm. 2.

V. Verknüpfungen dritter Ordnung.

§ 8. Anwendung der Reduzierungsregeln.

Wir gehen nach dem in § 5 a. E. entwickelten Plane auch bei der Besprechung von S_3 vor.

An Wertmöglichkeiten für die φ, ψ, χ kommen jedesmal für $\mu = 1$ und $\mu = 2$ folgende 26 Tripel in Frage:

	I_ϱ	II_ϱ	III_ϱ	IV_ϱ	V_ϱ	VI_ϱ	VII_ϱ	VIII_ϱ	IX	X
φ	ϱ	ϱ	ϱ	ϱ	ϱ	ϱ	ϱ	ϱ	1	2
ψ	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3
χ	1	2	3	1	2	3	1	2	3	3

$(\varrho = 1, 2, 3)$

Durch Anwendung von Regel I ergibt sich für beide Reihen — $\mu = 1$ und $\mu = 2$ — die Identität von II_ϱ mit IV_ϱ, von III_ϱ mit VII_ϱ, von VI_ϱ mit VIII_ϱ.

Wir legen der ferneren Diskussion II_ϱ, III_ϱ, VI_ϱ zugrunde.

Durch Anwendung von Regel II werden folgende Tripel als widerspruchsvoll erkannt: aus denen der Reihe $\mu = 1$ alle die, bei denen ψ oder $\chi = 1$ ist; aus denen der Reihe $\mu = 2$ alle die, bei denen ψ oder $\chi = 1$ oder 2 ist. — In der Tat ist, $\mu = 1$ und $\tau = 1$ genommen, für das (nach Anm. 1 S. 165) stets existierende Paar $A \neq B$, das für alle existierenden $K_\nu (\nu < \varphi)$ die Bedingung erfüllt:

$$S_{\tau'}(A, B) \neq K_\nu:$$
$$S_1(A, 0) = S_1(B, 0), \quad \text{d. i.} \quad A = B,$$

also ein Widerspruch. Und ebenso ist für $\mu = 2$ und $\tau = 1$ oder 2, wiederum für das Paar $A \neq B$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{entweder} & S_1(A, K_2) = S_1(B, K_2) \\ \text{oder} & S_2(A, K_2) = S_2(B, K_2) \end{array}\right\}, \text{ also jedenfalls, da } K_2 \neq 0 \text{ ist, } A = B.$$

Daher läßt Regel II nur noch übrig: Aus der Reihe

$$\mu = 1: \; V_\varrho, VI_\varrho, IX, X.$$
$$\mu = 2: \; IX, X.$$

Nach Regel III darf nun — da wegen $K_2 \neq K_1$ auch $S_1(K_1, K_2) \neq S_2(K_1, K_2)$ ist — S_3 nicht zugleich mit S_1 und S_2 nach IX oder X verbunden werden. Wir drücken das kurz so aus: Für S_3 sind die Kombinationen $(IX; IX)$ und $(X; X)$ verboten.

Regel IV endlich wenden wir auf die Tripel IX und X der Reihe $\mu = 2$ an. Danach ergibt sich nämlich für $IX(\mu = 2)$:

$$S_3(A, K_2) = S_1(S_3(A, K_2), S_3(A, K_2)) = S_1(S_3(A, K_2), 0),$$

also:

$$S_3(A, K_2) = 0.$$

Auf $X(\mu = 2)$ angewendet, liefert Regel IV:

$$S_3(A, K_2) = S_2(S_3(A, K_2), S_3(A, K_2)) = S_2(S_3(A, K_2), K_2).$$

Also muß, wenn $S_3(A, K_2) \neq 0$ ist, $S_3(A, K_2) = K_2$ sein. Andere Werte, als 0 oder K_2, kann mithin $S_3(A, K_2)$ nicht annehmen. — Wir schließen hier gleich

noch folgende Erörterungen an: Nach $X(\mu = 2)$ gilt:

$$S_3(A, B) = S_3(A, S_2(B, K_2)) = S_2(S_3(A, B), S_3(A, K_2)).$$

Für alle A somit, für die $S_3(A, K_2) = 0$ ist, ist auch $S_3(A, B) = 0$, gleichgültig, welchen Wert auch B besitzen möge. Es kann sonach nicht für alle A die Gleichung $S_3(A, K) = 0$ gelten, da sonst für alle A und B auch $S_3(A, B) = 0$, also trivial wäre. Nehmen wir nun zwei verschiedene B, etwa $B' \neq B''$, so folgt für alle A, für die $S_3(A, K_2) = 0$ ist,

$$S_3(A, B') = S_3(A, B'') = 0.$$

Daraus würde sich nun stets nach Grundgleichung **(3)** auf den Widerspruch $B' = B''$ schließen lassen, wenn $A \neq 0$ und $\neq K_2$ angenommen wird. Nur für diese beiden Werte von A könnte sonach ohne Widerspruch die Gleichung $S_3(A, K_2) = 0$ bestehen.

Endlich darf aber, bei $X(\mu = 2)$ auch nicht $S_3(K_2, K_2) = 0$ gesetzt werden, da sonst für jedes A folgen würde:

$$S_3(A, K_2) = S_3(S_2(A, K_2), K_2) = S_2(S_3(A, K_2), S_3(K_2, K_2)) = 0,$$

was nicht sein darf. — Somit ist für jedes $A \neq 0$ bei $X(\mu = 2)$:

$$S_3(A, K_2) = K_2.$$

§ 9. Diskussion der Restfälle.

Bevor wir eine endgültige Zusammenstellung der übriggebliebenen Tripel und ihrer Kombinationsmöglichkeiten vornehmen, sei noch bemerkt, daß die Verbindung von S_3 mit S_2 gemäß IX stets zu Widersprüchen führt. Das erkennt man so:

Wir haben durch Anwendung von Regel IV festgestellt, daß nach $IX(\mu = 2)$ stets

$$S_3(A, K_2) = 0$$

sein muß. Andererseits ist ebenso für jedes A:

$$S_3(A, 0) = S_3(A, S_2(0, 0)) = S_1(S_3(A, 0), S_3(A, 0)) = 0 = S_3(A, K_2).$$

Für jedes $A \neq 0$ und $\neq K_2$ erhalten wir deshalb den Widerspruch

$$K_2 = 0.$$

Nach alledem behalten wir nur noch folgende Tripel zur weiteren Betrachtung und Kombination übrig: In der Reihe

$$\mu = 1: \quad V_\varrho, VI_\varrho, IX, X.$$
$$\mu = 2: \quad X.$$

Da sich außerdem nach Regel III die Kombination $(X; X)$ verbietet, so haben wir noch 7 Möglichkeiten zur Bestimmung von S_3 als Verknüpfung dritter Ordnung.

Wir sehen nun zu, ob schon allein der Versuch, S_3 mit S_1 (gemäß $V_\varrho, VI_\varrho, IX$) zu verbinden, Widersprüche oder Trivialitäten hervorbringt. Ist dies bei einem Tripel nicht der Fall, so versuchen wir seine Kombination mit $X(\mu = 2)$. Nur dann, wenn sich auch hier nicht Widersprüche oder Trivialitäten ergeben, muß die durch diese Kombination bestimmte Verknüpfung dritter Ordnung als weiterhin beachtbar anerkannt werden.

Wir beginnen mit dem Versuche, S_3 mit S_1 nach den Werten

$$V_\varrho(\psi = \chi = 2)$$

zu verbinden. Hierbei wird also:

$$S_3(A, B) = S_3(A, S_1(B, 0)) = S_\varrho(S_2(A, B), S_2(A, 0)) = S_\varrho(S_2(A, B), 0).$$

Für $\varrho = 2$ folgt hieraus sofort die Trivialitätsgleichung:

$$S_3(A, B) = 0.$$

Setzen wir $\varrho = 3$, so wird — $S_2(A, B) = W$ gesetzt —

$$S_3(A, B) = S_3(W, 0) = S_3(S_1(W, 0), 0) = S_3(S_2(W, 0), S_2(0, 0)) \\ = S_3(0, 0) = \text{constans},$$

folglich ebenfalls trivial.

Für $\varrho = 1$ endlich wird

$$S_3(A, B) = S_2(A, B)$$

und das führt zu einem Widerspruch, sowie wir versuchen, S_3 mit S_2 zu vereinigen. Da nämlich hierfür nur $X(\mu = 2)$ in Frage kommt, müßte für jedes $A \neq 0$ gelten: $S_3(A, K_2) = K_2$. Nun folgt aber aus $S_3(A, B) = S_2(A, B)$, daß stets $S_3(A, K_2) = A$ sein müsse. Für alle $A \neq K_2$ liefert das einen Widerspruch.

Somit sind die drei in V_ϱ enthaltenen Möglichkeiten, S_3 zu bestimmen, auszuscheiden.

Wir entwickeln nunmehr nach

$$VI_\varrho(\psi = 2, \chi = 3).$$

Hiernach wird

$$S_3(A, B) = S_3(A, S_1(0, B)) = S_\varrho(S_2(A, 0), S_3(A, B)) = S_\varrho(0, S_3(A, B)).$$

Auch hier ist für $\varrho = 2$ sofort die Trivialität ableitbar:

$$S_3(A, B) = 0.$$

Und ähnlich, wie in V_ϱ, schließen wir bei $\varrho = 3$ auf die Trivialität, indem wir $S_3(A, B) = Z$ setzen:

$$Z = S_3(0, Z) = S_3(0, S_1(Z, 0)) = S_3(S_2(0, Z), S_3(0, 0)) = S_3(0, S_3(0, 0)) = \text{constans}.$$

Für $\varrho = 1$ wenden wir folgende Entwicklung an:

$$S_3(A, B) = S_3(A, S_1(B, 0)) = S_1(S_2(A, B), S_3(A, 0)).$$

Und weiterhin:

$$S_3(A, 0) = S_3(S_1(A, 0), 0) = S_1(S_2(A, B), S_3(0, 0)) = S_3(0, 0).$$

Also

$$S_3(A, B) = S_1(S_2(A, B), S_3(0, 0))$$

oder, für $B = K_2$,

$$S_3(A, K_2) = S_1(A, S_3(0, 0)).$$

Da nun nach $X(\mu = 2)$: $S_3(A, K_2) = K_2$ ist, für jedes $A \neq 0$, so müßte stets

$$S_1(A, S_3(0, 0)) = K_2$$

sein. Ist nun $S_3(0, 0) = 0$, so führt dies für alle $A \neq K_2$ zum Widerspruch $A = K_2$. Ist aber $S_3(0, 0) = C \neq 0$, so liefert $A = K_2$ die widerspruchsvolle Gleichung

$$S_1(K_2, C) = K_2, \quad \text{d. i.} \quad C = 0.$$

Wir gelangen nunmehr zur letzten Möglichkeit, S_3 mit S_1 zu verbinden:

$$IX(\varphi = 1, \ \psi = \chi = 3).$$

Hierbei gelangt man am schnellsten zur Einsicht des Widerspruches durch folgende Entwicklung:

$$S_3(K_2, S_1(A, K_2)) = S_1(S_3(K_2, A), S_3(K_2, K_2)).$$

Nun ist für jedes $A \neq 0$, wie durch Anwendung von Regel IV gezeigt wurde, bei $X(\mu = 2)$:

$$S_3(A, K_2) = K_2.$$

Dieses in die Entwicklung von $IX(\mu = 1)$ eingesetzt, ergibt, wenn A noch so gewählt wird, daß $S_1(A, K_2) = 0$ und also $S_3(K_2, S_1(A, K_2)) = K_2$ ist,

$$K_2 = S_1(K_2, K_2), \text{ also } K_2 = 0,$$

im Gegensatz zur ständigen Annahme $K_2 \neq 0$.

Auch die letztmögliche Kombination endet somit in einem Widerspruch.

§ 10. Ergebnis.

Der Versuch, eine Verknüpfung dritter Ordnung zu finden, die sich gemäß den Grundgleichungen **(1)—(6)** widerspruchsfrei und nicht-trivial entwickeln lasse, ist nach alledem als mißlungen zu betrachten. Ein S_3 existiert in diesem Sinne nicht.

Ebenso könnte man für ein S_4, ein S_5, usf. schließen, so daß wir berechtigt sind, zu sagen: Die Kette der Verknüpfungen S_λ bricht nach dem zweiten Gliede ab.

Das Ergebnis unserer Untersuchungen ist also folgendes:

Versucht man, im Gebiete der rationalen Zahlen diejenigen Zahlverknüpfungen zu konstruieren, die den Grundgleichungen **(1)—(6)** *ohne Widerspruch und ohne Trivialität gehorchen, so tritt unter den Verknüpfungen erster Ordnung die Addition auf. Wird diese als Verknüpfung erster Ordnung den weiteren Untersuchungen zugrunde gelegt, so erscheint als Verknüpfung zweiter Ordnung eine mit der Multiplikation sehr nahe verwandte Verknüpfung. Weitere Verknüpfungen gibt es nicht.*

Die dynamische Stabilität der Bewegung eines Massenpunktes, der von 2 festen Zentren nach dem *Newton*schen Gesetz attrahiert wird.

Von *Oskar Przewisinski* in Breslau.

Das Problem der Bewegung eines Massenpunktes, der von zwei festen Zentren nach dem *Newton*schen Gesetz attrahiert wird, ist schon von *Euler*, dann besonders von *Lagrange*, *Legendre*, *Jacobi*, *Serret*[1]), *Koenigsberger*[2]) eingehend behandelt worden. In neuerer Zeit hat *Charlier*[3]) alle in der Ebene möglichen Formen von Bahnkurven angegeben und unter Anwendung der Theorie der bedingt periodischen Bewegungen einen wesentlichen neuen Beitrag geliefert.

Die vorliegende Arbeit wird nun, in der Hauptsache an *Charlier* anschließend, die dynamische Stabilität einer Klasse singulärer Bahnkurven untersuchen, nämlich der konfokalen Ellipsen, deren Brennpunkte mit den attrahierenden Massen zusammenfallen.

Unter „dynamischer" Stabilität wird die „oszillierende" im Sinne *Philipp Franks*[4]) verstanden:

„Eine Bahnkurve heißt von einem Punkte P aus oszillierend stabil, wenn sich ein positives ε so angeben läßt, daß bei Änderung der Geschwindigkeitsrichtung in P um einen Winkel $|\alpha| < \varepsilon$ die neue Kurve die alte immer und immer wieder schneidet".

Diese Schnittpunkte sind die sogenannten konjugierten kinetischen Brennpunkte der Variationsrechnung, und es ist unsere Aufgabe, mit den Methoden dieser Disziplin die Frage nach der Existenz konjugierter Punkte zu entscheiden.

I.

Die Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} = 1; \qquad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} = 1$$

definieren zusammen mit den Ungleichungen

$$(2) \qquad -b \leqq \nu \leqq +b \leqq \mu < \infty.$$

---

[1]) *M. J. A. Serret.* Thèse sur le mouvement d'un point matériel. Journal de mathématiques XIII, S. 17 ff.

[2]) *Leo Koenigsberger.* De motu punkti versus duo fixa centra attracti. Diss. Berlin 1860.

[3]) *C. L. Charlier.* Die Mechanik des Himmels I. Leipzig 1902. S. 117 ff.

[4]) *Ph. Frank.* Ein Kriterium für die Stabilität eines materiellen Punktes. Monatshefte für Math. und Phys. 20, S. 171 ff.

ein System konfokaler Ellipsen (μ = konst.) und Hyperbeln (ν = konst.). Bezeichnen r bezw. r' die Entfernungen eines Punktes P von den Brennpunkten, so sind

$$\mu = \frac{r + r'}{2}; \qquad \nu = \frac{r - r'}{2} \qquad \text{(siehe Figur 1)} \tag{3}$$

die elliptischen Koordinaten des Punktes P, durch deren Einführung das Problem auf Quadraturen zurückgeführt werden kann. Aus (1) und (3) folgt

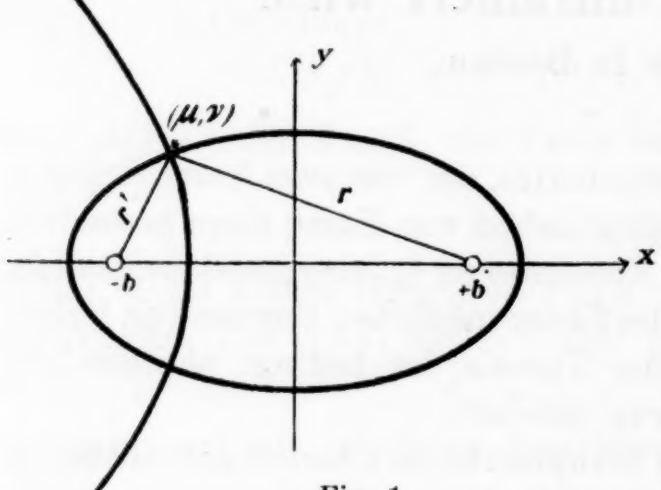


Fig. 1.

$$x = -\frac{\mu\nu}{b};$$
$$y = \pm\frac{1}{b}\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)} \tag{4}$$

Zu jedem Wertepaar (μ, ν) gehören 2 bezüglich der x-Achse symmetrisch liegende Punkte.

Befinden sich die attrahierenden Massen g und g', die stets positiv vorausgesetzt werden sollen, in den Brennpunkten $x = +b$ und $x = -b$, so lauten die Differentialgleichungen der Bewegung in separierter Form [1])

$$\begin{cases} \dfrac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = \dfrac{d\nu}{\sqrt{N(\nu)}} \\ dt = \dfrac{\mu^2\, d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} - \dfrac{\nu^2\, d\nu}{\sqrt{N(\nu)}} \end{cases} \tag{5}$$

$M(\mu)$ und $N(\nu)$ sind Polynome 4. Grades:

$$\begin{cases} M(\mu) = (\mu^2 - b^2)(2h\mu^2 + 2\mu(g + g') - A) \\ N(\nu) = (\nu^2 - b^2)(2h\nu^2 + 2\nu(g - g') - A). \end{cases} \tag{5 a}$$

Die Energiekonstante h ist gegeben durch die Gleichung

$$h = \frac{v^2}{2} - \frac{g}{\mu + \nu} - \frac{g'}{\mu - \nu} \tag{6}$$

wo v die Geschwindigkeit bedeutet. In die Definitionsgleichung für die Konstante A geht auch die Richtung der Geschwindigkeit ein; es ist

$$A = 2h\mu^2 + 2\mu(g + g') - \frac{\dot{\mu}^2(\mu^2 - \nu^2)^2}{(\mu^2 - b^2)} \tag{7}$$
$$= 2h\nu^2 + 2\nu(g - g') - \frac{\dot{\nu}^2(\mu^2 - \nu^2)^2}{(\nu^2 - b^2)} \qquad \left(\dot{\mu} = \frac{d\mu}{dt}\right).$$

A muß den Ungleichungen

$$2h\nu^2 + 2\nu(g - g') \leqq A \leqq 2h\mu^2 + 2\mu(g + g') \tag{7 a}$$

für jedes Wertepaar (μ, ν) der Bahnkurve genügen.

Bei der Untersuchung der Stabilität der „Koordinatenellipsen" beschränken wir uns zunächst auf eine bestimmte Kurve $\mu = \mu_0$. Nun verlangt die Variationsrechnung die Einordnung dieser Ellipse in eine einfach unendliche Schar von Bahn-

[1]) Die Gleichungen (5) und (5 a) werden bei *Serret* und *Charlier* abgeleitet.

kurven, die, wegen der Definition der oszillierenden Stabilität, mit gleichem Betrage, aber mit von Kurve zu Kurve verschiedener Richtung der Anfangsgeschwindigkeit durch einen festen Punkt (μ_0, ν_0) hindurchgehen müssen. Dann ist h eine universelle Konstante und zwar negativ, weil der Massenpunkt dauernd im Endlichen verbleibt[1]); A ist der Scharparameter. Es fragt sich: Kann aus einer der bekannten Bewegungsformen eine solche Schar hergestellt werden, die für einen bestimmten Wert des Parameters A die gewünschte singuläre Kurve enthält?

Die Polynome M und N haben die Wurzeln

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} M: -b, +b, \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} = \dfrac{g+g'}{2h_1} \pm \dfrac{1}{2h_1}\sqrt{(g+g')^2 - 2Ah_1} \\ N: -b, +b, \begin{matrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \end{matrix} = \dfrac{g-g'}{2h_1} \pm \dfrac{1}{2h_1}\sqrt{(g-g')^2 - 2Ah_1} \end{array}\right\} \quad (h_1 = -h).$$

Wird dann vorausgesetzt, daß $r_1 > r_2 > b$ sei und ferner das Intervall der Variablen ν durch ϱ_1 und ϱ_2 nicht beeinflußt werde, so verbleibt die Bahnkurve innerhalb des von den Ellipsen $\mu = r_1$ und $\mu = r_2$ eingeschlossenen Ringgebiets[2]). Die Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 müssen dann, wenn sie reell sind, beide außerhalb des Intervalls $-b \leqq \nu \leqq +b$ liegen. (Entweder $\varrho_1 > \varrho_2 > b$ oder $\varrho_2 < \varrho_1 < -b$). Oder aber sie sind konjugiert komplex. Nur dieser Fall führt auf neue Ergebnisse, und wir setzen fest:

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} M(\mu) \text{ hat 4 reelle Wurzeln: } r_1 \geqq \mu \geqq r_2 > b > -b \\ N(\nu) \text{ hat 2 reelle Wurzeln: } -b \leqq \nu \leqq +b;\ \begin{matrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \end{matrix} = \dfrac{g-g'}{2h_1} \pm \dfrac{i}{2h_1}\sqrt{2Ah_1 - (g-g')^2}, \end{array}\right.$$

wo $h_1 = -h$ gesetzt ist. $h_1 > 0$.

Wir erhalten nun in der Tat eine Koordinatenellipse, wenn r_1 und r_2 gegeneinander gehen. Für $\dot{\mu} = 0$ haben wir

$$A = -2h_1\mu_0^2 + 2\mu_0(g+g').$$

Diese Gleichung wird durch $A = \dfrac{(g+g')^2}{2h_1}$ und $\mu_0 = \dfrac{g+g'}{2h_1}$ erfüllt.

Die Differentialgleichung der Bahnkurven führt auf elliptische Integrale erster Gattung. Wir bringen diese auf die Normalform von *Legendre* mittels einer linearen Transformation der Variablen μ bezw. ν, die z. B. bei *Weierstraß* ausführlich angegeben ist[3]). Ferner führen wir eine neue unabhängige Variable u ein und setzen

$$(10)\qquad \frac{d\mu}{\sqrt{M}} = \frac{d\nu}{\sqrt{N}} = du.$$

Wir nehmen im Anfangszustande der Bewegung $u = 0$ und $\dfrac{d\mu}{d\nu} > 0$ an; dann wird

$$(11)\qquad \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{M}} = \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{N}} = u.$$

---

[1]) Siehe bei *Charlier*.

[2]) Siehe *Charlier*: „Die Mechanik des Himmels", die unter I, c diskutierte Bewegungsform.

[3]) *K. Weierstraß*, Gesammelte Werke VI., S. 177 ff., Berlin 1915.

Führen wir die lineare Transformation aus und beachten hierbei die Festsetzungen (9) sowie die Tatsache, daß der Koeffizient der 4. Potenz beider Polynome negativ ist, so sind wir in der Lage, die elliptischen Integrale umzukehren, und wir erhalten dann die Gleichungen der Kurvenschar in der Parameterform $[\mu = \mu(u, A),\ \nu = \nu(u, A)]$:

$$(12)\quad \begin{cases} \mu = \dfrac{1}{2}(r_1 + r_2) + \dfrac{1}{2}(r_1 - r_2)\dfrac{(sn\,w - n)}{(1 - n\,sn\,w)} \\ \nu = -\dfrac{b(cn\,\bar{w} + \bar{n})}{(1 + \bar{n}\,cn\,\bar{w})}, \end{cases} \quad \text{wo} \quad (12a)\quad \begin{cases} sn\,w = sn(m(u + u_0), \varkappa) \\ cn\,\bar{w} = cn(\bar{m}(u + \bar{u}_0), \bar{\varkappa}). \end{cases}$$

Die überstrichenen Größen beziehen sich auf das Polynom N; d. h. auf die Variable ν. Die Konstanten $m, n, \varkappa$ bezw. $\bar{m}, \bar{n}, \bar{\varkappa}$ sind durch die Wurzeln von $M(\mu)$ bezw. $N(\nu)$ gegeben. In ihnen ist der Scharparameter enthalten.

u_0 und $\bar{u}_0$ sind Integrationskonstanten; sie müssen voneinander verschieden angenommen werden, weil sonst eine Festlegung des Anfangszustandes der Bewegung unmöglich wäre.

II.

Die Gleichungen (12) gestatten nun die unmittelbare Anwendung der Variationsrechnung. Die dem Parameter A_0 entsprechende Kurve der Schar: $\mu = \mu(u, A)$, $\nu = \nu(u, A)$ ist bekanntlich, von dem gemeinsamen Punkte $(\mu_0, \nu_0)(u = 0)$ aus gerechnet, solange Extremale des Aktionsintegrals: $\int \sqrt{U + h}\, ds$, als die Funktionaldeterminante

$$(13)\qquad \Delta(u, A)_{A = A_0} = \left| \begin{matrix} \mu_u, & \mu_A \\ \nu_u, & \nu_A \end{matrix} \right|_{A = A_0}$$

von 0 verschieden ist. Hat die Gleichung $\Delta = 0$ außer $u = 0$ noch andere Lösungen, so liefern diese die konjugierten kinetischen Brennpunkte.

Für die Ableitungen nach dem Scharparameter A führen wir folgende Bezeichnung ein

$$(14)\qquad \frac{d}{dA}(r_1 - r_2) = (r_1 - r_2)^*; \quad \frac{dn}{dA} = n^* \quad \text{usw.}$$

Aus (12) und (13) folgt zunächst

$$(15)\quad \Delta = \frac{-b}{2(1 - n\,sn\,w)^2(1 + \bar{n}\,cn\,\bar{w})^2} \begin{vmatrix} m(r_1 - r_2)(1 - n^2)sn'w & [(r_1 - r_2)^*(snw(1 + n^2) - n(1 + sn^2 w)) + (r_1 - r_2)(sn^* w.(1 - n^2) - n^* cn^2 w)] \\ \bar{m}(1 - \bar{n}^2)cn'\bar{w} & [(1 - \bar{n}^2)cn^*\bar{w} + \bar{n}^* sn^2\bar{w}] \end{vmatrix}$$

Hierin bedeutet $sn'w = \dfrac{d\,sn\,w}{dw}$.

Zur weiteren Berechnung der Determinante (15) brauchen wir die Additionstheoreme der elliptischen Funktionen snv, cnv und benutzen die Abkürzungen

$$(16)\quad \begin{cases} sn(mu,\varkappa)=s;\ \underset{u=0}{(sn\,w)}=sn(mu_0,\varkappa)=s_0;\ sn(\bar m u,\bar\varkappa)=\bar s;\ sn(\bar m\bar u_0,\bar\varkappa)=\bar s_0,\\ cn(mu,\varkappa)=c;\qquad cn(mu_0,\varkappa)=c_0;\ cn(\bar m u,\bar\varkappa)=\bar c;\ cn(\bar m\bar u_0,\bar\varkappa)=\bar c_0,\\ dn(mu,\varkappa)=d;\qquad dn(mu_0,\varkappa)=d_0;\ dn(\bar m u,\bar\varkappa)=\bar d_1;\ dn(\bar m\bar u_0,\bar\varkappa)=\bar d_0, \end{cases}$$

so daß die mit dem Index 0 versehenen Größen Konstanten sind.

Dann folgt aus (12)

$$(17)\qquad s_0=\frac{n(r_1-r_2)+2\mu_0-(r_1+r_2)}{r_1-r_2+n(2\mu_0-r_1-r_2)};\qquad \bar c_0=-\frac{(b\bar n+v_0)}{(b+\bar n v_0)}.$$

Bezüglich des Wertes μ_0 ist folgendes zu bemerken: Jede Kurve der Schar verbleibt innerhalb des von 2 Ellipsen abgegrenzten Gebietes, deren große Halbachsen r_1 und r_2 Funktionen des Scharparameters sind. Nur der Wert $\mu_0=\frac{g+g'}{2h_1}$ kann daher universell für die ganze Schar sein, und aus (17) ergibt sich

$$(18)\qquad s_0=n;\qquad \mu_0=\frac{g+g'}{2h_1}.$$

Trotzdem werden im folgenden s_0, c_0, d_0, der Symmetrie wegen beibehalten.

Die Bestimmung der Ausdrücke sn^*w, cn^*w erfordert einige Vorbereitungen; denn die Funktionen s usw. enthalten den Scharparameter nicht nur in dem Faktor m des Arguments, sondern auch in dem Modul. Es wird

$$(19)\quad s^*=\frac{d}{dA}(sn(mu,\varkappa))=m^*u\frac{d}{d(mu)}(sn(mu,\varkappa))+\frac{\partial\, sn(mu,\varkappa)}{\partial\varkappa}\varkappa^*.$$

Die partiellen Ableitungen der elliptischen Funktionen *Jacobi*s nach dem Modul sind von *Cayley* [1]) angegeben worden:

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\, snv}{\partial\varkappa}=\dfrac{v\,cnv\,dnv}{\varkappa}+\dfrac{\varkappa}{\varkappa'^2}snv\,.\,cn^2v-\dfrac{E(v)\,cnv\,dnv}{\varkappa\varkappa'^2}\ ^2)\\ \dfrac{\partial\, cnv}{\partial\varkappa}=-\dfrac{v\,snv\,dnv}{\varkappa}-\dfrac{\varkappa}{\varkappa'^2}sn^2v\,.\,cnv+\dfrac{E(v)\,snv\,dnv}{\varkappa\varkappa'^2}\\ \dfrac{\partial\, dnv}{\partial\varkappa}=-\varkappa v\,snv\,cnv-\dfrac{\varkappa}{\varkappa'^2}sn^2v\,dnv+\dfrac{\varkappa}{\varkappa'^2}E(v)\,snv\,cnv, \end{cases}$$

$$\text{wo}\quad E(v)=\int_0^v dn^2v\,dv.$$

Wir übergehen die Zwischenrechnungen, setzen

$$(21)\qquad E(mu)=E,$$

führen die Funktionen

$$(22)\quad \begin{cases} f(u)=1-\varkappa^2s_0^2s^2\\ \varphi(u)=c_0d_0s+s_0cd\\ \psi(u)=c_0c-s_0d_0sd\\ \chi(u)=d_0d-\varkappa^2s_0c_0sc \end{cases} \quad \begin{cases} l(u)=d_0c^2+d_0s_0^2s^2(d^2+\varkappa'^2)-2s_0c_0scd\\ \dot\chi(u)=cd+\varkappa^2s_0^2s^2cd+2\varkappa^2s_0c_0d_0s^3\\ \lambda(u)=s_0d_0d(c_0^2s^2-c^2-\varkappa'^2s_0^2s^2)+c_0sc(s_0^2d^2-c_0^2)\\ \xi(u)=-d_0sd-\varkappa^2s_0^2d_0s^3d+2\varkappa^2s_0c_0s^2c \end{cases},$$

---

[1]) *A. Cayley*: An elementary treatise on elliptic functions. Cambridge 1876.

[2]) Die Formeln (20) werden z. B. benutzt von: *L. Koschmieder*, Anwendung der elliptischen Funktionen auf die Bestimmung konjugierter Punkte bei Problemen der Variationsrechnung. Diss. Breslau 1913.

ein und erhalten schließlich

$$
(23)\qquad \Delta = Q\cdot\begin{vmatrix} m(r_1-r_2)(1-n^2)\varkappa^2\varkappa'^2\psi(u)\chi(u) & \begin{aligned}&2\varkappa^2\varkappa'^2(r_1-r_2)^*\,[(1+n^2)\varphi(u)f(u)\\&\quad -n(\varphi^2(u)+f^2(u))]\\&+(r_1-r_2)(1-n^2)\,[(u\varkappa'^2(2\varkappa^2 m^*+m\varkappa^{2*})\\&\quad -E\varkappa^{2*})\psi(u)\chi(u)+\varkappa^2\varkappa^{2*}c_0 s\,l(u)\\&+2\varkappa^2\varkappa'^2 s_0^*\mathfrak{x}(u)+2\varkappa^2\varkappa'^2(c_0^*d_0+d_0^*c_0)\,s f(u)\\&-2n^*(r_1-r_2)\varkappa^2\varkappa'^2\psi^2(u)\end{aligned}\\ \overline{m}(1-\overline{n}^2)\,\overline{\varkappa}^2\,\overline{\varkappa}'^2\,\overline{\varphi(u)}\,\overline{\chi(u)} & \begin{aligned}&(1-\overline{n}^2)\,[(u\,\overline{\varkappa}'^2(2\,\overline{\varkappa}^2\,\overline{m}^*+\overline{m}\,\overline{\varkappa}^{2*})\\&\quad -\overline{E}\,\overline{\varkappa}^{2*})\,\overline{\varphi(u)}\,\overline{\chi(u)}-\overline{\varkappa}^2\,\overline{\varkappa}^{2*}\overline{s}\;\overline{\lambda(u)}\\&\quad -2\,\overline{\varkappa}^2\,\overline{\varkappa}'^2\,\overline{s}_0^*\,\overline{\xi(u)}\\&\quad -2\overline{\varkappa}^2\overline{\varkappa}'^2(\overline{c}_0^*\,\overline{c}-\overline{s}_0\,\overline{d}_0^*\,\overline{s}\,\overline{d})\,\overline{f(u)}\\&-2\,\overline{n}^*\,\overline{\varkappa}^2\,\overline{\varkappa}'^2\,\overline{\varphi^2(u)}\end{aligned} \end{vmatrix},
$$

wo

$$
(23\,a)\qquad Q=\frac{b}{4\varkappa^2\varkappa'^2\,\overline{\varkappa}^2\,\overline{\varkappa}'^2(1-n\,sn\,w)^2\,(1+\overline{n}\,cn\,\overline{w})^2\,f^2(u)\,\overline{f^2(u)}}.
$$

III.

1.

Aus der allgemeinen Kurve der Schar (12) geht, wie bereits erwähnt, die Koordinatenellipse $\mu=\mu_0=\frac{g+g'}{2h_1}$ hervor, wenn der Scharparameter A den Wert $A_0=\frac{(g+g')^2}{2h_1}$ annimmt.

Die Funktionaldeterminante $\Delta(u,A)$, die für die Untersuchung der dynamischen Stabilität maßgebend ist, ist in (23) angegeben. An ihr ist nunmehr, vgl. (13), der Grenzübergang $A\to A_0=\frac{(g+g')^2}{2h_1}$ $(r_1\rightleftarrows r_2)$ auszuführen und dann zu entscheiden, ob und durch welche Werte von u die Gleichung

$$\lim_{r_1=r_2}\Delta=0 \quad \text{erfüllt wird.}$$

Zunächst müssen wir die Konstanten m, $\varkappa$ usw. nach den bei *Weierstraß* angegebenen Formeln berechnen. Wir setzen

$$
(24)\qquad \frac{A}{2h_1}=\gamma;\qquad \mu_0=\frac{g+g'}{2h_1}=a;\qquad \frac{g-g'}{2h_1}=\overline{a}
$$
$$
\sqrt{(\gamma+b^2)^2-4a^2b^2}=\sigma;\qquad \sqrt{(\gamma+b^2)^2-4\overline{a}^2b^2}=\overline{\sigma}
$$

und erhalten

$$
(25)\qquad \begin{cases} \varkappa^2=\dfrac{\gamma^2+b^4-2a^2b^2-\sigma(\gamma-b^2)}{2b^2(a^2-\gamma)};\quad n=\dfrac{2a^2-\gamma-b^2-\sigma}{2a\sqrt{a^2-\gamma}};\\ m=\dfrac{1}{2}\sqrt{2h_1}\left[\sqrt{\gamma-b^2-2b\sqrt{a^2-\gamma}}+\sqrt{\gamma-b^2+2b\sqrt{a^2-\gamma}}\right]\\ \qquad\qquad\qquad\

Hieraus ergeben sich für $r_1 \underset{(a^2=\gamma)}{=} r_2$ die Grenzwerte

$$(26)\quad \begin{cases} \varkappa = 0; \quad n = 0; \quad m = \sqrt{2h_1}\sqrt{\gamma - b^2}; \quad \lim\limits_{r_1=r_2}[n^*(r_1 - r_2)] = \dfrac{-a\gamma^*}{a^2 - b^2}; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lim\limits_{r_1=r_2}[\varkappa^{2*}(r_1 - r_2)] = 0 \\ \text{ferner, da } \varkappa = 0, \\ \qquad \lim\limits_{\varkappa=0}\left[\dfrac{mu - E(mu)}{\varkappa^2}\right] = 0 \text{ und wegen } n = 0 \text{ nach (18)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad s_0 = 0; \quad c_0 = d_0 = 1. \\ \lim\limits_{r_1=r_2}[(r_1 - r_2)s_0^*] = \dfrac{-a\gamma^*}{a^2 - b^2}; \quad \lim\limits_{r_1=r_2}[(r_1 - r_2)c_0^*] = \lim\limits_{r_1=r_2}[(r_1 - r_2)d_0^*] = 0. \end{cases}$$

Die überstrichenen Konstanten $\bar{m}$, $\bar{n}$, $\bar{\varkappa}$ usw. bleiben endlich.

Wird nun an der Funktionaldeterminante (23) der Grenzübergang $(r_1 \rightleftarrows r_2)$ vorgenommen, so wächst, während alles übrige endlich bleibt, der Summand

$$m(1 - \bar{n}^2)(1 + n^2)(r_1 - r_2)^* \overline{\varphi(u)}\,\overline{\chi(u)}\,\varphi(u)\,f(u),$$

da $(r_1 - r_2)^* = \dfrac{-\gamma^*}{\sqrt{a^2 - \gamma}}$, über alle Grenzen.

Das vermeiden wir, wenn wir, vor Übergang zu dem Limes: $r_1 = r_2$, die ganze Determinante mit $(r_1 - r_2)$ multiplizieren.

Dann erhalten wir, vermöge (25) (26),

$$(27)\quad \lim_{r_1=r_2}[(r_1 - r_2)\Delta]$$
$$= \lim_{\varkappa=0}(\varkappa^2 Q)\,2\bar{m}(1 - \bar{n}^2)\bar{\varkappa}^2\bar{\varkappa}^2\overline{\varphi(u)}\,\overline{\chi(u)}\,\varphi(u)\,f(u)\lim_{r_1=r_2}[(r_1 - r_2)(r_1 - r_2)^*] = 0.$$

Nach (23 a) ist $\lim\limits_{\varkappa=0}(\varkappa^2 Q)$ endlich. Es ist $f(u) = 1$; $\varphi(u) = s = sn(mu, 0)$ $= \sin(mu)$.

Die Gleichungen $\overline{\varphi}(u) = 0$ und $\overline{\chi(u)} = 0$ ergeben $v_u = 0$, d. h. die Librationsgrenzen von v. Maßgebend für die dynamische Stabilität bleibt also nur die Bedingung

$$(28)\qquad \sin(mu) = 0; \quad u = 0, \quad \frac{\pi}{m}, \quad \frac{2\pi}{m} \quad \text{usw.}$$

Der Grenzübergang $r_1 \rightleftarrows r_2$ erfordert noch eine Ergänzung. Die Gleichungen der Kurvenschar waren unter der Voraussetzung: $\left(\dfrac{d\mu}{dv}\right)_{u=0} > 0$ aufgestellt, und für die Koordinatenellipse ist ja $\dfrac{d\mu}{dv} = 0$. Sämtliche Kurven der Schar $\dfrac{d\mu}{dv} > 0$ gehen durch den festen Punkt (μ_0, v_0) und liegen, wenigstens im Anfange der Bewegung, in dem schraffierten Gebiet (Fig. 2). Der Scharparameter A enthält (vgl. (7)) $\dot{\mu}_0$, bzw. $\dot{v}_0$, nur quadratisch und nimmt für $\dot{\mu}_0 = 0$ den größten Wert an.

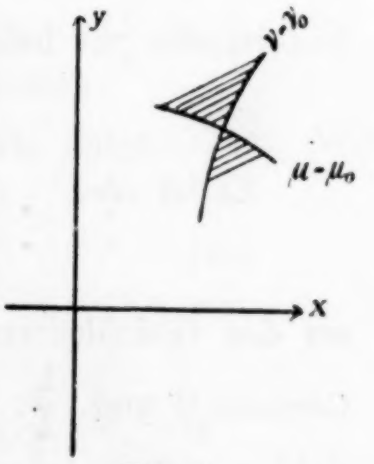


Fig. 2.

Es fragt sich: Wie gestalten sich die Verhältnisse, wenn man die Schar $\left(\dfrac{d\mu}{dv}\right)_{u=0} < 0$, die in dem nicht schraf-

fierten Winkelraume liegt, zugrunde legt und dann den Limes der neuen Determinante berechnet?

Nun ist aber offenbar, wenn $\frac{d\mu}{\sqrt{M}} = -\frac{dv}{\sqrt{N}}$ und $v_u > 0$ genommen werden, in allen Formeln, die sich auf μ beziehen, u durch $-u$ zu ersetzen. Die Bedingung für die konjugierten Punkte wird dann, wie leicht zu ersehen: $\sin(-mu) = 0$ und sagt dasselbe aus wie (28). Immerhin ist die singuläre Extremale μ_0 erst dann wirklich in eine Schar eingebettet, wenn die Kurven: $\frac{d\mu}{dv} < 0$ mit hinzugenommen werden.

2.

Aus (12) ergibt sich als Gleichung der Bahnkurve für $r_1 = r_2$

$$(29) \qquad \mu = \mu_0 = \frac{g + g'}{2h_1}; \qquad v = -\frac{b(\overline{cc_0} - \overline{sds_0d_0} + \overline{n} - \overline{n\varkappa^2 s_0^2 s^2})}{(1 - \overline{\varkappa^2 s_0^2 s^2} + \overline{ncc_0} - \overline{nsds_0d_0})}.$$

Die Koordinaten der konjugierten kinetischen Brennpunkte ergeben sich aus (29) durch Einsetzen der Werte: $u = 0, \frac{\pi}{m}$ usw. in die Funktionen $\bar{s} = sn(\overline{m}u, \overline{\varkappa}), \bar{c}, \bar{d}$.

Hier ist nun von entscheidender Bedeutung die Frage: Kann es der Fall sein, daß die Argumente $\frac{\overline{m}}{m}\pi$ usw. ganze Vielfache des vollständigen Integrals 1. Gattung $\overline{K} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \bar{\varkappa}^2 \sin^2\varphi}}$ sind oder wenigstens in einem möglichst einfachen rationalen Verhältnis zu dieser Größe stehen, und wann tritt dieser Fall ein?

Nach (24) bis (26) wird für $r_1 = r_2$ $(\alpha^2 = \gamma)$

$$(30) \qquad \frac{\overline{m}}{m} = \sqrt{\frac{1}{1 - 2\bar{\varkappa}^2}}.$$

Die Entwickelung des letzten Ausdruckes nach positiven Potenzen von $\bar{\varkappa}^2$ beginnt mit den Gliedern

$$(31) \qquad \frac{\overline{m}}{m} = 1 + \bar{\varkappa}^2 + \frac{3}{2}\bar{\varkappa}^4 + \frac{35}{8}\bar{\varkappa}^6 + \frac{63}{8}\bar{\varkappa}^8 + \cdots.$$

Andererseits gilt bekanntlich die Reihendarstellung

$$(32) \qquad \overline{K} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\bar{\varkappa}^2}{4} + \frac{9}{64}\bar{\varkappa}^4 + \cdots\right).$$

Es ist also

$$(33) \qquad \frac{\overline{m}}{m} \geqq 2\overline{K},$$

wo das Gleichheitszeichen für $\bar{\varkappa} = 0$ zu nehmen ist. $\bar{\varkappa}^2$ liegt zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}$. Wie aus der Fig. 3 zu ersehen, gibt es für jede positive Zahl $a \geqq 2$ einen und nur einen Wert $\bar{\varkappa}^2$, der die Gleichung

$$\frac{\overline{m}\pi}{m} = a\overline{K} \tag{34}$$

erfüllt. Für einen bestimmt gewählten Wert von a kann das zugehörige $\bar{\varkappa}^2$ durch Interpolation gefunden werden. So ergeben sich z. B., nach den Tafeln von Legendre, folgende Werte für die einfachsten Fälle:

1. $a = \frac{5}{2}$; $\frac{6}{32} < \bar{\varkappa}^2 < \frac{7}{32}$	D. h.: In dem Intervall $\frac{6}{32} - \frac{7}{32}$ z. B. liegt ein bestimmter Wert von $\bar{\varkappa}^2$, der die Gleichung: $\frac{\overline{m}\pi}{m} = \frac{5}{2}\overline{K}$ erfüllt.
2. $a = 3$; $\frac{10}{32} < \bar{\varkappa}^2 < \frac{11}{32}$	
3. $a = \frac{7}{2}$; $\frac{27}{72} < \bar{\varkappa}^2 < \frac{28}{72}$	
4. $a = 4$; $\frac{28}{72} < \bar{\varkappa}^2 < \frac{29}{72}$	

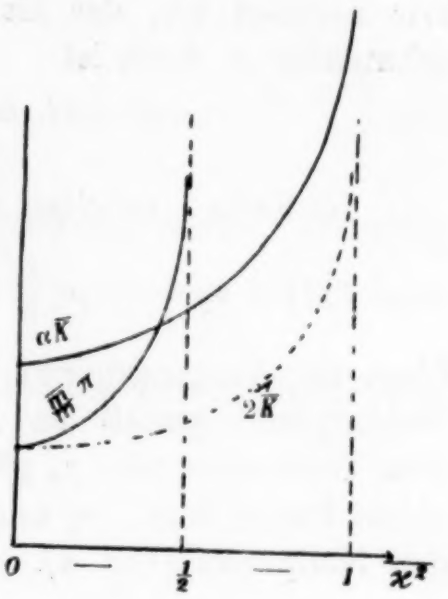


Fig. 3.

Die Anzahl der, bezüglich ihrer Lage auf der Ellipse, verschiedenen konjugierten Punkte steht in notwendigem Zusammenhang mit der Natur der Zahl a. Ist a irrational, so werden die elliptischen Funktionen, denen das Argument $\frac{\overline{m}\pi}{m}\tau = a\overline{K}\tau$ (τ positiv und ganz) zuzuerteilen ist, für irgend 2 verschiedene τ nie denselben Wert annehmen. Die Zahl der konjugierten Punkte wird unbeschränkt. Ist a dagegen rational $\left(a = \frac{a_1}{a_2};\ a_1 \text{ und } a_2 \text{ ganz}\right)$, so kann die Zahl der verschiedenen konjugierten Punkte unter Umständen sehr groß sein; sie ist aber stets angebbar. Die diophantische Gleichung

$$\frac{\overline{m}\pi}{m} q = 4\overline{K} p \tag{35}$$

sagt für die rationalen Fälle aus: Der q-te konjugierte Punkt wird nach p Umläufen erreicht und ist der Ausgangspunkt. (Denn für $\overline{m}u = 4\overline{K}$ wird $v = v_0$.)

So folgt z. B. für die 4 oben angegebenen Werte von a

1. $a = \frac{5}{2}$; $q = 8,\ p = 5$	8 konjugierte Punkte	5 Umläufe
2. $a = 3$; $q = 4,\ p = 3$	4 „ „	3 „
3. $a = \frac{7}{2}$; $q = 8,\ p = 7$	8 „ „	7 „

4. $a = 4$. — Alle Punkte fallen mit $v = v_0$ zusammen.

Für diese Fälle wollen wir die Lage der konjugierten Punkte untersuchen. Wir setzen dabei

$$g = g' \quad (\bar{a} = 0),$$

d. h. gleiche Intensität der attrahierenden Massen voraus.

Dann wird nach (17) und (25)

$$\bar{n} = 0;\ \bar{\varkappa}^2 = \frac{b^2}{b^2 + \mu_0^2};\ \bar{c}_0 = -\frac{v_0}{b};\ \bar{s}_0 = \pm\frac{1}{b}\sqrt{b^2 - v_0^2}. \tag{36}$$

Wir nehmen an, der Massenpunkt bewege sich im Anfange in Richtung abnehmender x, dann ist

$$\bar{s}_0 > 0, \quad \text{da} \quad \bar{s}_0 = \frac{v_u|^{u=0}}{b\,\bar{m}\,\bar{d}_0}.$$

Im Falle 2 erhalten wir zunächst als Koordinaten der konjugierten Punkte

$$(37) \qquad v_1 = -\mu_0 \sqrt{\frac{b^2 - v_0^2}{\mu_0^2 + v_0^2}}; \quad v_2 = -v_0; \quad v_3 = +\mu_0 \sqrt{\frac{b^2 - v_0^2}{\mu_0^2 + v_0^2}}; \quad v_4 = v_0.$$

Liegt der Ausgangspunkt im 1. Quadranten ($v_0 < 0$, $y_0 > 0$), so bewegt sich der Massenpunkt gemäß der Annahme $\bar{s}_0 > 0$ entgegen dem Sinne des Uhrzeigers. Das Vorzeichen von v_u gibt den Quadranten an, in dem der betreffende konjugierte Punkt liegt. v_1 und v_3 ebenso v_2 und v_4 liegen auf je einer Geraden durch den Nullpunkt (Fig. 4).

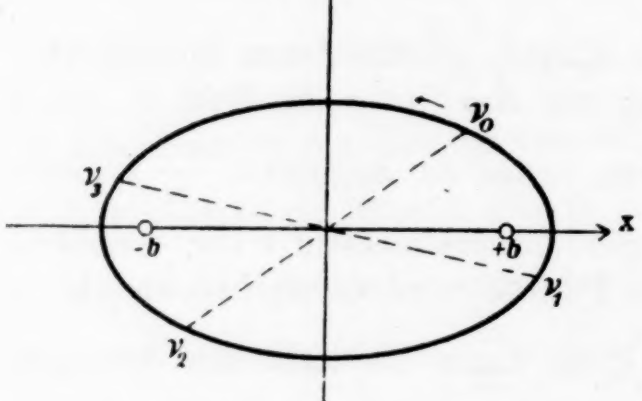


Fig. 4.

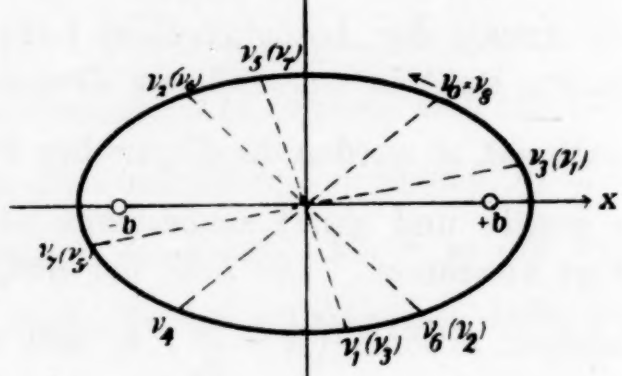


Fig. 5.

Ist $v_0 = 0$, dann sind die 4 Scheitel der Ellipse die konjugierten Punkte.

Es ist $|v_1| \gtrless v_0$, wenn $v_0^2 \gtrless -\mu_0^2 + \mu_0\sqrt{\mu_0^2 + b^2}$ ist. Ist $v_0^2 = -\mu_0^2 + \mu_0\sqrt{\mu_0^2 + b^2}$, so werden die konjugierten Punkte durch die 4 Schnittpunkte der beiden Hyperbelzweige: v_0 mit der Ellipse angegeben.

Der Fall 1 liefert 8 konjugierte Punkte bei 5 Umläufen.

Die elliptischen Funktionen erhalten hier das Argument $\frac{K}{2}$ und nehmen daher die Werte an:

$$sn\left(\frac{\bar{K}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{\varkappa}'}}, \qquad cn\left(\frac{\bar{K}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\bar{\varkappa}'}{1 + \bar{\varkappa}'}}; \qquad dn\left(\frac{\bar{K}}{2}\right) = \sqrt{\bar{\varkappa}'}.$$

Die Koordinaten der konjugierten Punkte werden

$$(38) \quad \begin{cases} v_1 = \dfrac{-\sqrt{\mu_0(b^2 + \mu_0^2)(\mu_0 + \sqrt{b^2 + \mu_0^2})}\left(v_0 + \sqrt{\dfrac{(b^2 - v_0^2)(\mu_0^2 + v_0^2)}{b^2 + \mu_0^2}}\right)}{\mu_0\sqrt{b^2 + \mu_0^2} + \mu_0^2 + v_0^2}; & v_2 = \mu_0\sqrt{\dfrac{b^2 - v_0^2}{\mu_0^2 + v_0^2}} \\ v_3 = \dfrac{\sqrt{\mu_0(b^2 + \mu_0^2)(\mu_0 + \sqrt{b^2 + \mu_0^2})}\left(v_0 - \sqrt{\dfrac{(b^2 - v_0^2)(\mu_0^2 + v_0^2)}{b^2 + \mu_0^2}}\right)}{\mu_0\sqrt{b^2 + \mu_0^2} + \mu_0^2 + v_0^2}; & v_4 = -v_0 \\ v_5 = -v_1; \quad v_6 = -v_2; \quad v_7 = -v_3; \quad v_8 = v_0. \end{cases}$$

Es ist $v_1 \gtreqless 0$, wenn $v_0^2 \gtreqless -\mu_0^2 + \mu_0\sqrt{b^2+\mu_0^2}$ ist.

Die Fig. 5 zeigt die Lage der 8 Punkte unter den Annahmen: $\begin{matrix} v_0 < 0 \\ y_0 > 0 \end{matrix}$ und $v_1 < 0$.

Je 2 Punkte (z. B. v_1 und v_5) liegen auf einer Geraden durch den Nullpunkt.

Ist speziell $v_0 = \begin{cases} 0 \\ \pm\, b \end{cases}$, dann liegen 4 konjugierte Punkte auf den Zweigen der Hyperbel $|v_1| = b\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\mu_0 + \sqrt{b^2+\mu_0^2}}}$, die 4 anderen sind die Scheitel der Ellipse.

Die Zahlen in der Figur 6 haben folgende Bedeutung: Die obere bezieht sich auf den Fall $v_0 = 0$, die mittlere auf $v_0 = +b$, die untere auf $v_0 = -b$.

Interessant ist noch der Fall:

$$v_0^2 = -\mu_0^2 + \mu_0\sqrt{b^2+\mu_0^2}.$$

Hier liegen die konjugierten Punkte auf den Scheiteln und auf den Zweigen der Hyperbel $|v_0|$.

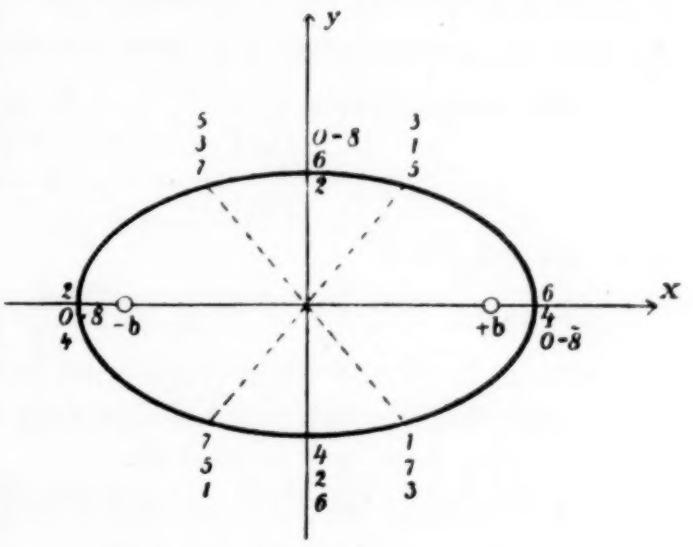


Fig. 6.

Der Fall 3 liefert wieder 8 konjugierte Punkte, aber bei 7 Umläufen. Für die Koordinaten ergeben sich dieselben Werte wie im Falle 1 (38), nur in anderer Reihenfolge. In der Fig. 5 sind die Zahlen, die sich auf diesen Fall $\left(a = \dfrac{7}{2}\right)$ beziehen, in Klammern angegeben.

Die Zahl a in (34) kann natürlich den Wert 4 überschreiten; nur schneidet dann die unendlich benachbarte Scharkurve die Ellipse erst nach dem ersten Umlauf. Die untersuchten einfachen Fälle wiederholen sich für höhere Werte von a. So sind z. B. die Fälle $a = 5, 7$ dem Fall $a = 3$, die Fälle $a = \dfrac{9}{2}, \dfrac{11}{2}$ dem Falle $a = \dfrac{5}{2}$ äquivalent. D. h. es ergeben sich dieselben Koordinaten der konjugierten Punkte, wenn auch die Reihenfolge von Fall zu Fall wechselt.

Ganz besonders einfach liegen die Verhältnisse für $a = 6$. Hier gibt es nur einen Punkt v_1, da $2\dfrac{\overline{m}}{m}\,\pi$ schon einen ganzen Vielfachen von $4\,\overline{K}$ gleich ist. $\bar{x}^2$ liegt zwischen den Werten $\dfrac{32}{72}$ und $\dfrac{34}{72}$. Ist noch $g = g'$, so wird $v_1 = -v_0$. Der konjugierte Punkt liegt auf der Geraden, die (μ_0, v_0) mit dem Nullpunkt verbindet.

3.

Wir untersuchen die Sonderfälle $g' = 0$ und $g = 0$. Die Bahnkurve $\mu = \mu_0$ wird zu einer Planetenellipse.

Es sei zunächst $g' = 0$.

Aus (25), (26) folgt: $\frac{\bar{m}}{m} = 1;\ \bar{\varkappa} = 0;\ \bar{n} = -\frac{b}{\mu_0}$.

Die elliptischen Funktionen $\bar{s}, \bar{c}, \bar{d}$ werden trigonometrisch. Die Konstante a in (34) wird 2.

Aus (29) ergibt sich für: $\bar{m}u = \frac{\bar{m}}{m}\pi = \pi$ vermöge (17) und (4)

$$x_1 = \frac{-(2b\mu_0^2 + x_0(\mu_0^2 + b^2))}{\mu_0^2 + b^2 + 2bx_0} \tag{39}$$

als Abszisse des konjugierten Punktes. Eine einfache Rechnung bestätigt die bekannte Eigenschaft der Planeteneliipse: Der konjugierte Punkt liegt auf der Geraden, die den Ausgangspunkt mit dem zweiten Brennpunkte verbindet.

Ist andererseits $g' \neq 0$; $g = 0$, so wird nach (25), (26):

$$\mu_0 = \frac{g'}{2h_1} = -\bar{a};\quad \bar{\varkappa} = 0;\quad \bar{n} = +\frac{b}{\mu_0};\quad \bar{m} = m,$$

und wir erhalten

$$x_1 = \frac{2b\mu_0^2 - x_0(\mu_0^2 + b^2)}{\mu_0^2 + b^2 - 2bx_0}, \tag{40}$$

Die Gerade, die die Punkte (μ_0, x_0) und (μ_0, x_1) verbindet, geht durch den Brennpunkt $x = +b$ hindurch.

Wir hatten im Anfange der Untersuchung bemerkt, daß die Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 des Polynoms N reell sein können, hatten aber diese Fälle von vornherein ausgeschlossen. In der Tat sind hier, soll μ = konst. sein, nur Planetenellipsen möglich: Für $\varrho_1 < \varrho_2 < b$ ist notwendig $g' = 0$, für $\varrho_2 < \varrho_1 < -b$ $g = 0$.

Legendre hat für die Geschwindigkeit des Massenpunktes auf der Koordinatenellipse ein interessantes Theorem aufgestellt, das wir kurz anführen. Die Elimination von h_1 aus den Gleichungen:

$$\mu_0 = \frac{g + g}{2h_1} \quad \text{und} \quad h_1 = -\frac{v^2}{2} + \frac{g}{\mu_0 + \nu} + \frac{g'}{\mu_0 - \nu}$$

liefert

$$v^2 = \frac{g(\mu_0 - \nu)}{\mu_0(\mu_0 + \nu)} + \frac{g'(\mu_0 + \nu)}{\mu_0(\mu_0 - \nu)}.$$

Hierfür können wir schreiben

$$v^2 = v^2_{(g'=0)} + v^2_{(g=0)} \tag{41}$$

D. h. Beschreibt der Massenpunkt ein und dieselbe Ellipse einmal infolge der Kraft $\frac{-g}{r^2}$, ein zweites Mal infolge der Kraft $\frac{-g'}{r'^2}$ und ein drittes Mal unter der Wirkung beider Kräfte, so besteht für alle Bahnpunkte die Relation (41).

4.

Wir haben gesehen, daß die für die Art der Stabilität maßgebende Konstante a von dem Modul $\bar{\varkappa}$ abhängt. Wir fragen nach der mechanischen Bedeutung einer Änderung von $\bar{\varkappa}$. Für gleiche Intensität der Massen war

$$\bar{\varkappa}^2 = \frac{b^2}{\mu_0^2 + b^2}; \qquad \mu_0^2 = b^2 \frac{\overline{\varkappa'}^2}{\bar{\varkappa}^2}.$$

Mit $\bar{\varkappa}$ wird auch μ_0 geändert, und zwar wächst μ_0 bei konstanter Anfangsgeschwindigkeit mit der Intensität g und nimmt ab bei Zunahme von v_0^2, wenn g unverändert bleibt. Das ist aus den Vorzeichen von $\frac{dg}{d\mu_0}$ und $\frac{dv_0^2}{d\mu}$ sofort ersichtlich.

Im allgemeinen Falle: $g \neq g'$ liegen die Verhältnisse anders. Wird die Größe

(42) $\varepsilon = \frac{g - g'}{g + g'}$ (ε zwischen 0 und 1. $\varepsilon = -1, 0, +1$ für $g = 0, g = g', g' = 0$)

eingeführt, so ergibt sich nach (25)

$$(43) \qquad \mu_0^2 = \frac{b^2}{2\bar{\varkappa}^2\overline{\varkappa'}^2}\Big[1 - 2\bar{\varkappa}^2\overline{\varkappa'}^2 - \varepsilon^2(1 - 2\bar{\varkappa}^2)^2 + \sqrt{-4\bar{\varkappa}^4\overline{\varkappa'}^4 + (1 - 2\bar{\varkappa}^2\overline{\varkappa'}^2 - \varepsilon^2(1 - 2\bar{\varkappa}^2)^2)^2}\Big].$$

Durch $\bar{\varkappa}$ ist μ_0 noch nicht bestimmt, sondern es geht μ_0^2 von $\frac{b^2\overline{\varkappa'}^2}{\bar{\varkappa}^2}$ gegen b^2, wenn ε^2 von 0 gegen 1 geht. Es können, bei beliebiger Wahl des Moduls, nicht alle Ellipsen als Bahnkurven gewählt werden, sondern die größte ist diejenige, für die $g = g'$ ist. Umgekehrt wird $\bar{\varkappa}$ geändert bei festem μ_0. Geht $\bar{\varkappa}^2$ von 0 bis $\frac{b^2}{\mu_0^2 + b^2}$, so geht ε von 1 bis 0.

Natürlich können alle 3 Größen $\bar{\varkappa}^2$, ε, μ_0 gleichzeitig geändert werden, aber nur so, daß die Beziehung (43) bestehen bleibt.

Wir wenden auf unser Problem das allgemeine Stabilitätskriterium von *Ph. Frank*[1]) an. Es besagt: Ist die kinetische Krümmung

$$K(x, y) = \frac{-1}{2(U + h)^2}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right] + \frac{1}{2(U + h)^3}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]$$

auf einer Bahnkurve, von einem bestimmten Punkte an, dauernd negativ, so ist die Bahn oszillierend nicht stabil. Ist aber $K(x, y)$, von einem Punkte an, stets größer als eine wesentlich positive Zahl, so ist die oszillierende Stabilität gesichert, wenn kein Punkt: $U + h = 0$ auf der Kurve liegt. U ist das Potential, h die Energiekonstante.

Wir erhalten

$$(44) \qquad K(x, y) = \frac{1}{2(U + h)^3}\left[-h\left(\frac{g}{r^3} + \frac{g'}{r'^3}\right) - \frac{4b^2 g g'}{r^3 r'^3}\right].$$

Ist also $h \gtrless 0$, so können, da g und g' positiv vorausgesetzt werden, konjugierte Punkte nicht auftreten. Ist dagegen $h = -h_1 < 0$, so folgt insbesondere für die Koordinatenellipsen unter Anwendung von (42)

$$(45) \quad K(x, y) = \frac{g h_1}{[(U + h) r r']^3}\left[\mu_0^3 + 3\mu_0 v^2 - \varepsilon(v^3 + 3\mu_0^2 v) - 2b^2\mu_0(1 - \varepsilon^2)\right].$$

[1]) *Ph. Frank.* Vgl. S. 173.

Die Untersuchung des Zählers hinsichtlich seines Vorzeichens im Intervall: $-b \leqq \nu \leqq +b$ ergibt: Das Kriterium von *Frank* liefert für $|\varepsilon| > \frac{2b\mu_0}{\mu_0^2 + b^2}$ und, sobald $\mu_0^2 > \frac{\varepsilon^2 b^2}{1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}}$, auch für $|\varepsilon| < \frac{2b\mu_0}{\mu_0^2 + b^2}$ die Entscheidung, daß konjugierte Punkte vorhanden sein müssen. Es versagt, wenn gleichzeitig $|\varepsilon| < \frac{2b\mu_0}{\mu_0^2 + b^2}$ und $\mu_0^2 < \frac{\varepsilon^2 b^2}{1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}}$; denn dann ist $K(x, y)$ längs einer Bahnkurve abwechselnd positiv und negativ. Ist $\varepsilon = 0\,(g = g')$, so werden alle Bahnen: $\mu_0^2 \geqq 2b^2$ als oszillierend stabil erwiesen. Ist $\varepsilon = \pm 1$, so ist $K(x, y)$ eo ipso positiv, und die Stabilität der Planetenellipsen wird evident.

5.

Für die dynamische Stabilität der Koordinatenellipsen spielt die Gleichung (34): $\frac{\overline{m}\pi}{m} = a\overline{K}$ eine entscheidende Rolle insofern, als die Anzahl der, hinsichtlich ihrer Lage, voneinander verschiedenen konjugierten Punkte durchaus davon abhängt, ob die Zahl a rational ist oder nicht. Diese Tatsache ist keine zufällige, sondern hat eine wesentliche mechanische Bedeutung.

Die Koordinaten μ, ν variieren bei der allgemeinen Bahnkurve (12) zwischen festen Schranken (μ zwischen r_1 und r_2, ν zwischen $-b$ und $+b$). Wir erstrecken die in (5) auftretenden Integrale über den ganzen Bereich der betreffenden Variablen und erhalten die sogenannten Elementarperioden

$$(46)\quad \text{a)}\ \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\mu}{\sqrt{M}} = \omega_{12};\quad \text{b)}\ \int_{-b}^{+b} \frac{d\nu}{\sqrt{N}} = \omega_{22};\quad \text{c)}\ \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{M}} = \omega_{11};$$

$$\text{d)}\ \int_{-b}^{+b} \frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{N}} = \omega_{21}.$$

Durch die in I benutzte Transformation wird

$$(47)\qquad \omega_{12} = \frac{2K}{m};\quad \omega_{22} = \frac{2\overline{K}}{\overline{m}}$$

und für $r_1 = r_2$

$$(48)\qquad \lim_{r_1 = r_2} (\omega_{12}) = \frac{\pi}{m}.$$

Wird nun $\frac{a}{2}$ rational, d. h. von der Form $\frac{a}{2} = \frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1}$ angenommen ($\bar{a}_1$ und $\bar{a}_2$ positive, ganze Zahlen), so wird nach (47), (48) und (34)

$$(49)\qquad \omega_{12}\bar{a}_1 - \omega_{22}\bar{a}_2 = 0.$$

Diese Gleichung findet ihre Erklärung durch die Theorie der „bedingt periodischen Bewegungen". *Charlier* hat diese auf die allgemeinen Bewegungsformen angewandt, die sich bei der Attraktion eines Massenpunktes nach 2 festen Zentren ergeben.

Die Bahnkurve, die innerhalb des von den beiden konfokalen Ellipsen eingeschlossenen Gebietes verbleibt, erfüllt dieses im allgemeinen „überall dicht". Es

kann jedoch der Fall eintreten, daß der Massenpunkt eine geschlossene Kurve beschreibt. Dann ist erstens die Bedingung (49) erfüllt; zweitens ist die Bewegung zeitlich periodisch nach der Periode

$$2T = 2\bar{a}_1\omega_{11} - 2\bar{a}_2\omega_{21}. \tag{50}$$

Die Elementarperioden sind Funktionen der Konstanten h und A. Wird eine derselben, etwa h, festgehalten, so kann (49) erfüllt werden durch eine unendliche Reihe diskreter Werte von A. Diese Fälle bilden eine abzählbare Menge. Degeneriert nun der Bereich der Bahnkurve, indem r_1 und r_2 gegeneinander gehen, und damit notwendig auch diese selbst in eine Koordinatenellipse, so wird $\frac{\overline{m}}{m} = \sqrt{\frac{1}{1-2\bar{\varkappa}^2}}$ und (49) kann durch eine unendliche Reihe diskreter Werte von $\bar{\varkappa}$ befriedigt werden.

Die Bahnkurve kann also sehr wohl eine Koordinatenellipse sein, ohne daß die variable Koordinate ν eine periodische Funktion der Zeit ist. Ist z. B. $g = g'$, so ändert sich, wie wir gesehen haben, der Modul nur dann, wenn von einer Ellipse zu einer anderen übergegangen wird. In diesem Falle gibt es eine unendliche, aber abzählbare Menge von konfokalen Ellipsen, für die ν zeitlich periodisch ist. Dazwischen aber liegen die nicht periodischen Bahnen, die zusammen eine nicht abzählbare Menge bilden.

Für den Fall $g' = 0$ berechnen wir zum Schlusse die Periode.

Es wird: $\bar{\varkappa} = 0$; $\overline{m} = m$; $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = 1$.

Also: $\omega_{11} = \frac{\mu_0^2\pi}{m}$;

$$\omega_{21} = \frac{b^2}{\overline{m}}\int_0^{\pi} \frac{(\cos\varphi + \bar{n})^2}{(1+\bar{n}\cos\varphi)^2}\,d\varphi; \qquad \overline{m} = \sqrt{2h_1}\sqrt{\mu_0^2 - b^2} = \sqrt{\frac{g}{\mu_0}}\sqrt{\mu_0^2 - b^2}.$$

Und es ergibt sich

$$(2T)^2 = \frac{4\pi^2}{g}\mu_0^3, \tag{51}$$

also das dritte *Keplers*che Gesetz: Das Quadrat der Umlaufzeit ist dem Kubus der großen Halbachse proportional.

Herr Geheimrat Professor Dr. *Adolf Kneser* hat mir die Bearbeitung dieses Problems empfohlen. Für das große Interesse, das er dem Fortgange meiner Untersuchungen entgegenbrachte, und für die Ratschläge, die er mir gegeben, spreche ich ihm an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aus.

Über eine *Heine*sche Potentialaufgabe.

Von Prof. Dr. *Bigler* in St. Gallen.

Heine behandelt im zweiten Bande der zweiten Auflage seines Handbuches über Kugelfunktionen § 21, S. 55—60 folgende Potentialaufgabe: „Zwei Kugelflächen liegen um den Ursprung, eine äußere mit dem Radius a und eine innere mit dem Radius b; die Massen liegen außerhalb der äußeren und innerhalb der inneren Fläche; der Raum zwischen beiden ist leer. Man verlangt das Potential V aller Massen in Bezug auf einen Punkt (x, y, z) des leeren Raumes, wenn es auf der äußeren Fläche durch $f(\eta, \omega)$ und auf der inneren Fläche durch $g(\eta, \omega)$ dargestellt ist". Auf Seite 58, § 21 sagt *Heine* folgendes: „Ein besonderes Interesse kommt, wie sich in § 29 zeigen wird, dem Falle zu, in welchem die gegebenen Funktionen $f_0(\eta, \psi)$ und $f_1(\theta, \psi)$ die reziproken Entfernungen T_0 und T_1 eines beliebig gegebenen festen Punktes (Pol) von den Punkten (θ, ψ) sind, welche auf den Kugelflächen $r = r_0$ und $r = r_1$ liegen, zumal wenn dieser feste Punkt sich in dem Raume befindet, der von den beiden Flächen eingeschlossen wird". — Auf Seite 60 gibt nun *Heine* für das Potential eines Punktes im leeren Zwischenraum einen Ausdruck in elliptischen Funktionen an, von dem er sagt, daß ihn auch *Mehler* in seiner Arbeit: „Zur Verteilung der Elektrizität im leitenden Körper, Jahresbericht des Elbinger Gymnasiums, Ostern 1879", durch ein ganz verschiedenes Verfahren in derselben Form gefunden habe. Diese Darstellung des Potentials durch elliptische Funktionen enthält einen schweren Irrtum, der bis jetzt nicht aufgedeckt worden ist. Läßt man den Bezugspunkt dem Pole sich nähern in einer ganz beliebigen Richtung, so geht die *Heine*sche Potentialfunktion in $-\frac{1}{\text{Abstand}}$ über, wird also in derselben Art unendlich wie der reziproke Wert des Abstandes. Es ist gar nicht zu erraten, auf welche Art das Potential von Massen, die außerhalb der äußern und innerhalb der innern Kugelfläche liegen, in einem einzigen Punkte des leeren Zwischenraumes unendlich groß werden könnte. *Heine* sagt kein Wort über den in der Lösung liegenden Widerspruch. Es ist unmöglich zu sagen, es sei $V = -(r^2 - 2rc\cos z + c^2)^{-1/2}$ die Lösung der Aufgabe, weil dann für beide Kugelflächen die den gegebenen entgegengesetzte Potentialbelegung herauskäme. Man könnte nur sagen, es sei unmöglich, endliche Massen außerhalb der äußeren Fläche und innerhalb der inneren so zu verteilen, daß für beide Flächen die gegebenen Potentialbelegungen herauskommen. Der Fehler, den *Heine* (und wahr-

scheinlich auch Herr *Mehler*) begangen hat bei der Ableitung seines Potentialausdruckes in elliptischen Funktionen, liegt in der Anwendung divergenter Reihen, welche aus der Spaltung zweier Summen, von denen jede für sich konvergiert, in 5 getrennte Summen, von denen jeweils zwei divergieren, hervorgegangen sind. Prof. *Schläfti* hat in seinen Vorlesungen über das Potential an der Hochschule Bern auf diesen Irrtum *Heines* aufmerksam gemacht, und ich benutze bei meiner Arbeit meine Kollegienhefte, die aus diesen Vorlesungen hervorgegangen sind. Ich will zuerst den Irrtum *Heines* aufdecken und dann, wie mir scheint, *eine naturgemäße Lösung der Aufgabe* an die Stelle der *Heines*chen Lösung setzen mit Hilfe von Pol und Gegenpol. Merkwürdig ist, daß *Heine* dieses vortreffliche Hilfsmittel hier nicht anwendete, das er doch in § 30 seines Handbuches beschreibt. —

Der Radius der äußern Kugel sei a und derjenige der innern b, der Raum zwischen beiden Kugelflächen ist leer; der Pol, der in diesem leeren Raume liegt, habe die Polarkoordinaten $(c, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$, also $b < c < a$; der Bezugspunkt P, der ebenfalls in diesem leeren Raume liegt, habe die Koordinate (r, θ, ψ); Punkte auf den beiden Kugelflächen sollen mit (a, η, ω) und (b, η, ω) bezeichnet werden. Ist ζ der Winkel, den die Strahlen vom Ursprunge nach den Punkten (a, η, ω) und $(c, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ miteinander bilden, so hat man $\cos\zeta = \cos\bar{\alpha}\cos\eta + \sin\bar{\alpha}\sin\eta\cos(\omega - \bar{\alpha})$; sind P_a und P_b die Potentialbelegungen der beiden Kugelflächen, so hat man

$$P = (a^2 - 2ac\cos\zeta + c^2)^{-\frac{1}{2}}; \qquad P = (b^2 - 2bc\cos\zeta + c^2)^{-\frac{1}{2}};$$

und

$$P_a = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c^n}{a^{n+1}} P^n(\cos\zeta); \qquad P_b = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b^n}{c^{n+1}} P^n(\cos\zeta)$$

sind ihre Entwicklungen nach *Laplace*schen Funktionen. Setzt man noch

$$a = e^{\alpha}; \quad b = e^{\beta}; \quad c = e^{\gamma}; \quad r = e^{\varrho}; \quad m = 2n + 1,$$

so ist

I. $$\sqrt{cr}\,.\,V(r, \theta, \psi)$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[e^{-\frac{m}{2}(\alpha-\gamma)} \frac{\operatorname{fin}\frac{m}{2}(\varrho-\beta)}{\operatorname{fin}\frac{m}{2}(\alpha-\beta)} P^n(\cos\zeta) + e^{-\frac{m}{2}(\gamma-\beta)} \frac{\operatorname{fin}\frac{m}{2}(\alpha-\varrho)}{\operatorname{fin}\frac{m}{2}(\alpha-\beta)} P^n(\cos\zeta) \right]$$

der *Heines*che Potentialausdruck (Seite 59, § 21). Wenn u positiv sehr groß ist, so kann man $\operatorname{cof} u$ und $\operatorname{fin} u$ annähernd durch $\frac{1}{2} e^u$ darstellen, und für eine große, positive Zahl m sind daher die beiden Brüche

$$c^{-\frac{m}{2}(\alpha-\gamma)} \frac{\operatorname{fin}\frac{m}{2}(\varrho-\beta)}{\operatorname{fin}\frac{m}{2}(\alpha-\beta)} \quad \text{und} \quad e^{-\frac{m}{2}(\gamma-\beta)} \frac{\operatorname{fin}\frac{m}{2}(\alpha-\varrho)}{\operatorname{fin}\frac{m}{2}(\alpha-\beta)}$$

annähernd gleich $\left(\frac{rc}{a^2}\right)^{\frac{m}{2}}$ und $\left(\frac{b^2}{rc}\right)^{\frac{m}{2}}$, wo $b < c < a$; $b < r < a$; beachtet man

noch, daß der absolute Wert von $P^n(\cos\zeta)$ die Zahl 1 nicht überschreitet, so konvergieren die beiden Summen in der Gleichung I wie

$$\sum^{n=\infty}\left(\frac{rc}{a^2}\right)^n P^n(\cos\zeta) \quad \text{und} \quad \sum^{n=\infty}\left(\frac{b^2}{rc}\right)^n P^n(\cos\zeta).$$

Um nun von hier aus die Form mit den elliptischen Funktionen zu erhalten, wollen wir *Heines* Rate folgen und die obigen zwei Summen in 5 getrennte Summen spalten. Es ist

$$e^{-\frac{m}{2}x}\,\mathfrak{sin}\,\frac{m}{2}y = \mathfrak{cof}\,\frac{mn}{2}\,\mathfrak{sin}\,\frac{my}{2} - \mathfrak{sin}\,\frac{mx}{2}\,\mathfrak{sin}\,\frac{my}{2} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{sin}\,\frac{m}{2}(x+y)$$
$$-\frac{1}{2}\,\mathfrak{sin}\,\frac{m}{2}(x-y) - \frac{1}{2}\,\mathfrak{cof}\,\frac{m}{2}(x+y) + \frac{1}{2}\,\mathfrak{cof}\,\frac{m}{2}(x-y);$$

setzt man hier

$x = \alpha - \gamma;\ y = \varrho - \beta$, so ist $x+y = \alpha - \beta - \gamma + \varrho;\ x-y = \alpha + \beta - \gamma - \varrho;$

und für

$x = \gamma - \beta;\ y = \alpha - \varrho$ hat man

$x+y = \alpha - \beta + \gamma - \varrho;\ x-y = \gamma + \varrho - \alpha - \beta = -(\alpha + \beta - \gamma - \varrho);$

wenn nun abkürzend

$$\xi_1 = \alpha - \beta - \gamma + \varrho;\quad \xi_2 = \alpha - \beta + \gamma - \varrho;\quad \xi_3 = \alpha + \beta - \gamma - \varrho$$

gesetzt wird, so ist

$$e^{-\frac{m}{2}(\alpha-\gamma)}\,.\,\mathfrak{sin}\,\frac{m}{2}(\varrho-\beta) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{sin}\,\frac{m}{2}\xi_1 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{sin}\,\frac{m}{2}\xi_2 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{cof}\,\frac{m}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{cof}\,\frac{m}{2}\xi_3$$

und

$$e^{-\frac{m}{2}(\gamma-\beta)}\,.\,\mathfrak{sin}\,\frac{m}{2}(\alpha-\varrho) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{sin}\,\frac{m}{2}\xi_2 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{sin}\,\frac{m}{2}\xi_3 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{cof}\,\frac{m}{2}\xi_2 + \frac{1}{2}\,\mathfrak{cof}\,\frac{m}{2}\xi_3$$

und für das Potential V ergibt sich der Ausdruck

II. $$\sqrt{cr}\,V(r,\theta,\psi)$$
$$= \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{P^n(\cos\zeta)}{\mathfrak{sin}\,\frac{m}{2}(\alpha-\beta)}\cdot\frac{1}{2}\left[\mathfrak{sin}\,\frac{m}{2}\xi_1 + \mathfrak{sin}\,\frac{m}{2}\xi_2 - \mathfrak{cof}\,\frac{m}{2}\xi_1 - \mathfrak{cof}\,\frac{m}{2}\xi_2 + 2\,\mathfrak{cof}\,\frac{m}{2}\xi_3\right].$$

Wenn $q = e^{-(\alpha-\beta)} = \frac{b}{a}$ gesetzt wird, so ist $\dfrac{1}{\mathfrak{sin}\,\frac{m}{2}(\alpha-\beta)} = \dfrac{2q^{\frac{m}{2}}}{1-q^m}$; die Summation geschieht nun mittels der *Dirichlet*schen Integralform für $P^n(\cos\zeta)$ und der Formel

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{q^{\frac{m}{2}}}{1-q^m}\,\mathfrak{sin}\,\frac{m\pi u}{2\varkappa} = \frac{iKk}{2\pi}\,S(-iu);\quad (S(u) = \sin\operatorname{am} u);$$

wird die erste der beiden Gleichungen

$$(1)\qquad P^n(\cos\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\zeta}^{+\zeta}\frac{\cos\frac{m\varphi}{2}\,d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\zeta)}};\qquad (2)\quad 0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\zeta}^{+\zeta}\frac{\sin\frac{m\varphi}{2}\,d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\zeta)}}$$

mit $\mathfrak{sin}\frac{m}{2}\xi$ und die zweite mit $i\,\mathfrak{cof}\frac{m}{2}\xi$ multipliziert und addiert, so folgt

$$\frac{\mathfrak{sin}\frac{m}{2}\xi}{\mathfrak{sin}\frac{m}{2}(\alpha-\beta)}\cdot P^n(\cos\zeta)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\zeta}^{+\zeta}\frac{2q^{\frac{m}{2}}}{1-q^m}\,\mathfrak{sin}\frac{m}{2}(\xi+i\varphi)\cdot\frac{d\varphi}{R},$$

wo $R=\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\zeta)}$ ist;

wird ferner die erste der beiden Gleichungen

$$(3)\quad P^n(\cos\zeta)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{\zeta}^{2\pi-\zeta}\frac{\sin\frac{m\varphi}{2}\,d\varphi}{\sqrt{2(\cos\zeta-\cos\varphi)}};\qquad (4)\quad 0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{\zeta}^{2\pi-\zeta}\frac{\cos\frac{m\varphi}{2}\,d\varphi}{\sqrt{2(\cos\zeta-\cos\varphi)}}$$

mit $\mathfrak{cof}\frac{m}{2}\xi$ und die zweite mit $(-i\,\mathfrak{sin}\frac{m}{2}\xi)$ multipliziert und addiert, so erhält man

$$\frac{\mathfrak{cof}\frac{m}{2}\xi}{\mathfrak{sin}\frac{m}{2}(\alpha-\beta)}\cdot P^n(\cos\zeta)=\frac{1}{i\pi}\cdot\int_{\zeta}^{2\pi-\zeta}\frac{2q^{\frac{m}{2}}}{1-q^m}\cdot\mathfrak{sin}\frac{m}{2}(\xi+i\varphi)\,\frac{d\varphi}{R'},$$

wo $R'=\sqrt{2(\cos\zeta-\cos\varphi)}$ ist.

Wendet man nun die oben angegebene Summenformel auf die 5 Summen der Gleichung II an, so erhält man die *Heine*sche Form des Potentials in den elliptischen Funktionen

$$\text{III.}\quad \sqrt{cr}\,.\,V(r,\theta,\psi)=\frac{iKk}{2\pi^2}\int_{-\zeta}^{+\zeta}\Big[-S\Big(\frac{K}{\pi}(\varphi+i\xi_1)\Big)-S\Big(\frac{K}{\pi}(\varphi+i\xi_2)\Big)\Big]\frac{d\varphi}{R}$$
$$+\frac{Kk}{2\pi^2}\int_{\zeta}^{2\pi-\zeta}\Big[2S\Big(\frac{K}{\pi}(\varphi+i\xi_3)\Big)-S\Big(\frac{K}{\pi}(\varphi+i\xi_1)-S\frac{K}{\pi}(\varphi+i\xi_2)\Big)\Big]\frac{d\varphi}{R'}.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit demjenigen *Heine*s Seite 60, Z. 7/8 überein, denn bei ihm sind

$$u=\frac{K}{\pi}(\varphi+i\xi_1);\quad u_2=\frac{K}{\pi}(\varphi+i\xi_2);\quad u_1=\frac{K}{\pi}(\varphi-i\xi_3);\quad u_3=\frac{K}{\pi}(\varphi+i\xi_3),$$

nur hat er nicht gesehen, daß

$$\frac{-iK}{2\pi^2}k\,.\int_{-\zeta}^{+\zeta}(S(u_1)+S(u_3))\frac{d\varphi}{R}=0\quad\text{ist und}$$

$$\frac{K}{2\pi^2}k\int_{\zeta}^{2\pi-\zeta}(S(u_1)+S(u_3))\frac{d\varphi}{R'}=\frac{K}{\pi^2}k\int_{\zeta}^{2\pi-\zeta}S(u_2)\frac{d\varphi}{R'}.$$

Von seinen zwei Argumenten u_1 und u_3 ist eines überflüssig,

Berechnung des Unstetigkeitstermes im Ausdrucke III.

1. Der Bezugspunkt $P(r,\theta,\psi)$ nähere sich dem Pole $(c,\bar{\alpha},\bar{\beta})$ auf der Kugelfläche $r=c$. Wenn $\varrho=\alpha$ ist, so hat ξ_3 seinen kleinsten Wert $-(\gamma-\beta)$ und,

wenn $\varrho = \beta$, seinen größten $(\alpha - \gamma)$; weil γ zwischen α und β gegeben ist, so kann ξ_3 die Werte $-(\alpha - \beta)$ und $(\alpha - \beta)$ nicht erreichen. Dagegen bleiben ζ_1 und ζ_2 stets positiv und bekommen, wenn $\varrho = \gamma$ wird, den gemeinschaftlichen Wert $(\alpha - \beta)$. Dann ist $\xi_3 = \alpha + \beta - 2\gamma$; $\frac{iK}{\pi}\xi_1 = \frac{iK}{\pi}\xi_2 = \frac{iK}{\pi}(\alpha - \beta) = L$; $(q = e^{-(\alpha-\beta)} = e^{i\pi\frac{L}{K}})$, folglich $S\left(\frac{K}{\pi}(\varphi + i\xi_1)\right) = S\left(\frac{K\varphi}{\pi} + L\right) = \frac{1}{kS\left(\frac{K\varphi}{\pi}\right)}$, und der Ausdruck für V unter III geht über in

$$cV = \frac{K}{\pi^2} \cdot \int_{\zeta}^{2\pi-\zeta} \left[kS\left(\frac{K}{\pi}(\varphi + i\xi_3)\right) - \frac{1}{S\left(\frac{K\varphi}{\pi}\right)}\right] \cdot \frac{d\varphi}{R'}; \quad \xi_3 = \alpha + \beta - 2\gamma;$$

$$R' = \sqrt{2(\cos\zeta - \cos\varphi)};$$

nun bleibe $r = c$ und der Bezugspunkt komme auf der Kugelfläche $r = c$ dem fingierten Pole $(c, \bar{\alpha}, \beta)$ sehr nahe; dann ist ζ positiv sehr klein und der Abstand beider Punkte kann auf $(c\zeta)$ geschätzt werden. $R' = 2\sqrt{\left(\sin^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\zeta}{2}\right)}$ kann, so lange als φ noch klein genug ist, auf $\sqrt{\varphi^2 - \zeta^2}$ geschätzt werden; das Integral $\int_{\zeta}^{2\pi-\zeta} kS\left(\frac{K}{\pi}(\varphi + i\xi_3)\right) \cdot \frac{d\varphi}{R'}$ wird nicht unendlich groß, wenn ζ gegen Null hingeht; ich muß diese Behauptung näher begründen. Das fragliche Integral kann durch

$$2kC\left(\frac{iK}{\pi}\xi_3\right) D\left(\frac{iK}{\pi}\xi_3\right) \cdot \int_{\zeta}^{\pi} \frac{S\left(\frac{K\varphi}{\pi}\right)}{1 - k^2 S^2\left(\frac{iK}{\pi}\xi_3\right) S^2\left(\frac{K\varphi}{\pi}\right)} \cdot \frac{d\varphi}{R'}$$

ersetzt werden; als obere Grenze wähle man einen Wert δ, der immer noch so klein ist, daß man $2\sin\frac{\varphi}{2}$ durch φ und $S\left(\frac{K\varphi}{\pi}\right)$ durch $\frac{K\varphi}{\pi}$ ersetzen kann, für den aber $\frac{\delta}{\zeta}$ sehr groß ist. Den Nenner kann man durch 1 ersetzen; mit Weglassung eines konstanten Faktors hat man dann

$$\int_{\zeta}^{\delta} \frac{\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\varphi^2 - \zeta^2}} = \sqrt{\delta^2 - \zeta^2} = \delta\sqrt{1 - \left(\frac{\zeta}{\delta}\right)^2},$$

was aber zugleich mit δ verschwindet. Das fragliche Integral bleibt also endlich und kann weggelassen werden, wenn es sich nur um den Unstetigkeitsterm von $cV(r, \theta, \psi)$ handelt. Dieser ist nun $-\frac{2}{\pi}\int_{\zeta}^{\delta} \frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{\varphi^2 - \zeta^2}}$; setzt man $\varphi = \frac{\zeta}{\cos u}$, $\cos\lambda = \frac{\zeta}{\delta}$, so ist der Ausdruck $-\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\zeta} \cdot \int_{0}^{\lambda}$ da, also angenähert $-\frac{1}{\zeta}$, weil

$\frac{\zeta}{\delta}$ sehr klein angenommen ist, und also λ nahezu $\frac{\pi}{2}$; der Unstetigkeitsterm von cV ist also $-\frac{1}{\zeta}$ und derjenige von V somit $-\frac{1}{c\zeta}$, als ob der Pol $(c, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ nicht nur fingiert, sondern ein wirklicher Massenpunkt mit der Masse (-1) wäre. Und doch gilt in der Behandlung der zwischen beiden Kugelflächen enthaltene Raum als leer. Es genügt nicht, den Bezugspunkt $P(r, \theta, \psi)$ dem Pole $(c, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ nur auf der Kugelfläche $r = c$ zu nähern, sondern die Annäherung soll in einer beliebigen Richtung geschehen, damit man wisse, ob der Unstetigkeitsterm überhaupt

$$V = -\frac{1}{\text{Abstand}}$$

sei oder nicht.

2. Der Bezugspunkt (r, θ, ψ) nähere sich dem Pole $(c, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ in einer beliebigen Richtung.

Wenn $\tau = \gamma - \varrho$, so sind $\frac{iK}{\pi}\xi_1 = L - \frac{iK\tau}{\pi}$; $\frac{iK}{\pi}\xi_2 = L + \frac{iK\pi}{\pi}$; es sei ferner (der Kürze wegen)

$$T(\xi) = \frac{-ikS\left(\frac{iK}{\pi}\xi\right)C\left(\frac{K\varphi}{\pi}\right)\cdot D\left(\frac{K\varphi}{\pi}\right)}{1 - k^2 S^2\left(\frac{iK}{\pi}\xi\right)S^2\left(\frac{K\varphi}{\pi}\right)}; \quad U(\xi) = \frac{kC\left(\frac{iK}{\pi}\xi\right)D\left(\frac{iK}{\pi}\xi\right)S\left(\frac{K\varphi}{\pi}\right)}{1 - k^2 S^2\left(\frac{iK}{\pi}\xi\right)S^2\left(\frac{K\varphi}{\pi}\right)};$$

dann ist

$$\sqrt{cr}\,V = \frac{K}{\pi^2}\cdot\int_0^{\zeta}(T(\xi_1) + T(\xi_2))\frac{d\varphi}{R} + \frac{K}{\pi^2}\cdot\int_{\zeta}^{\pi}(2U(\xi_3) - U(\xi_1) - U(\xi_2))\frac{d\varphi}{R'}.$$

Weil $-ikS\left(\frac{iK}{\pi}\xi_1\right) = \frac{i}{S\left(\frac{iK\tau}{\pi}\right)}$, $-ikS\left(\frac{iK}{\pi}\xi_2\right) = -\frac{i}{S\left(\frac{iK\tau}{\pi}\right)}$, so ist

$$T(\xi_1) + T(\xi_2) = 0$$

und der erste Term im Ausdrucke für V fällt weg. Weil ferner

$$C(L + x) = -i\frac{D(x)}{kS(x)}; \quad D(L + x) = -i\frac{C(x)}{S(x)},$$

$$\text{so ist } kC(L + x)D(L + x) = -\frac{C(x)D(x)}{S^2(x)}$$

und ändert sich nicht, wenn man x durch $(-x)$ ersetzt. Der einfachste allgemeine Ausdruck für das Potential ist daher

$$\sqrt{cr}\,V(r, \theta, \varphi)$$

$$= \frac{2K}{\pi^2}\int_{\zeta}^{\pi}\left[\frac{kC\left(\frac{iK}{\pi}\xi_3\right)D\left(\frac{iK}{\pi}\xi_3\right)S\left(\frac{K\varphi}{\pi}\right)}{1 - k^2 S^2\left(\frac{iK}{\pi}\xi_3\right)S^2\left(\frac{K\varphi}{\pi}\right)} - \frac{C\left(\frac{iK\tau}{\pi}\right)D\left(\frac{iK\tau}{\pi}\right)S\left(\frac{K\varphi}{\pi}\right)}{S^2\left(\frac{K\varphi}{\pi}\right) - S^2\left(\frac{iK\tau}{\pi}\right)}\right]\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\zeta - \cos\varphi)}},$$

wo $\tau = \gamma - \varrho$; $\xi_3 = \alpha + \beta - 2\gamma + \tau$ ist. Um den Unstetigkeitsausdruck für einen beliebigen Zugang des Bezugspunktes zum Pole zu bekommen, nehme ich beide, ζ und τ als unendlich klein erster Ordnung an und als obere Grenze einen Wert δ von niedrigerer Ordnung als der ersten, für den $\frac{\delta}{\zeta}$ und $\frac{\delta}{\tau}$ sehr groß werden, der aber immer noch erlaubt, $S\left(\frac{K\varphi}{\pi}\right) = \frac{K\varphi}{\pi}$ und $2(1 - \cos\varphi) = \varphi^2$ zu setzen. Dann ist mit Vernachlässigung solcher Werte, die neben dem Ergebnisse nicht in Betracht kommen

$$cV = -\frac{2}{\pi} \cdot \int_{\zeta}^{\delta} \frac{\varphi}{\varphi^2 + \tau^2} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2 - \zeta^2}},$$

und wenn $w^2 = \varphi^2 - \zeta^2$ und als obere Grenze (für w) δ statt $\sqrt{\varrho^2 - \zeta^2}$ gesetzt wird, so ist

$$cV = -\frac{2}{\pi} \int_{0}^{\delta} \frac{dw}{w^2 + \zeta^2 + \tau^2} = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + \tau^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\delta}{\sqrt{\zeta^2 + \tau^2}}$$

oder

$$cV = -\frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + \tau^2}}.$$

Der Pol sei mit A, der Bezugspunkt mit P und der Ursprung mit O bezeichnet; wegen des Winkels ζ ($= \sphericalangle AOP$) kann r selbst als Projektion des Strahles $\overline{OP}$ auf den Strahl $\overline{OA}$ gelten, also $c - r = c(1 - e^{-\tau}) = c\tau$ als Projektion des Abstandes $\overline{AP}$ auf $\overline{OA}$. Die Projektion des Abstandes auf die Kugelfläche ist $c\zeta$; der Abstand $\overline{AP}$ selbst also $c\sqrt{\zeta^2 + \tau^2}$. Der Unstetigkeitsterm ist daher

$$V = -\frac{1}{\text{Abstand}},$$

von welcher Seite her auch P sich dem Pole nähern möge. In der Lösung der Potentialaufgabe ist ein Fehler enthalten. Wir untersuchen die 5 Summen der Gleichung II auf ihre Convergenz und Divergenz. Mag ϱ größer oder kleiner als γ sein, so sind beide Ausdrücke $(\alpha - \beta - \gamma + \varrho)$ und $(\alpha - \beta + \gamma - \delta)$ immer positiv; für große positive Werte von m haben die 5 Brüche

$$\frac{\operatorname{fin}\frac{m}{2}\xi_1}{\operatorname{fin}\frac{m}{2}(\alpha-\beta)}, \quad \frac{\operatorname{fin}\frac{m}{2}\xi_2}{\operatorname{fin}\frac{m}{2}(\alpha-\beta)}, \quad \frac{\operatorname{cof}\frac{m}{2}\xi_1}{\operatorname{fin}\frac{m}{2}(\alpha-\beta)}, \quad \frac{\operatorname{cof}\frac{m}{2}\xi_2}{\operatorname{fin}\frac{m}{2}(\alpha-\beta)}, \quad \frac{\operatorname{cof}\frac{m}{2}\xi_3}{\operatorname{fin}\frac{m}{2}(\alpha-\beta)},$$

als auftretende Koeffizienten in diesen Summen angenähert die Werte

$$\left(\frac{r}{c}\right)^n, \quad \left(\frac{c}{r}\right)^n, \quad \left(\frac{r}{c}\right)^n, \quad \left(\frac{c}{r}\right)^n, \quad \left(\frac{b^2}{cr}\right)^n.$$

Ist nun 1. $\varrho > \gamma$, also $r > c$, so divergieren die erste und dritte Summe wie $\sum^{n=\infty} \frac{r^n}{c^n} P^n(\cos\zeta)$, während die zweite und vierte Summe konvergieren wie

$\sum^{n=\infty} \frac{c^n}{r^n} P^n(\cos\zeta)$ und die fünfte Summe konvergiert wie $\sum^{n=\infty} \frac{b^{2n}}{c^n r^n} P^n(\cos\zeta)$; ist aber 2. $\varrho < \gamma$, also $r < c$, so divergieren die Summen 2 und 4, während die erste, dritte und fünfte Summe konvergieren. Der Fehler, den *Heine* begangen hat, liegt also in der Spaltung der zwei konvergenten Summen der Gleichung I in fünf andere, von denen je zwei divergieren und in der Anwendung der oben angegebenen Summenformel auf diese divergenten Reihen. Ein Ausgleich zwischen $\mathfrak{fin}\, u$ und $\mathfrak{cof}\, u$, der sogleich die Konvergenz wieder herstellen würde, ist wegen der verschiedenen Intervalle $(-\zeta < \varphi < \zeta)$ und $(\zeta < \varphi < 2\pi - \zeta)$ der zwei Dirichletschen Integrale nicht möglich.

Lösung der *Heine*schen Potentialaufgabe mittels Pol und Gegenpol.

Beide Punkte, Pol und Gegenpol, liegen auf demselben Radius, der eine B innerhalb der Kugelfläche (b), der andere A außerhalb der Kugelfläche (a). Ihre Massen verhalten sich wie $\overline{OB}$ zum Radius a, gleichwie der Radius a zu $\overline{OA}$; der Radius ist das geometrische Mittel zwischen den Abständen der zwei Pole vom Mittelpunkte. Beide legen auf der Kugelfläche dasselbe Potential ab. Im Folgenden werden bei jedem Pole zwei Werte eingeklammert; der erste ist die Masse, der zweite ist der Abstand des Poles vom Mittelpunkte O. Der Radius, auf dem alle liegen, soll Achse heißen (pos. Richtung). Die Poldistanzen θ oder η werden alle von dieser Achse an gezählt; die Azimute ω werden gar nicht in Betracht kommen. Der im Zwischenraume befindliche fingierte Pol $(1, c)$ soll herausgeschafft werden. Er legt auf der äußeren Fläche (a) dasselbe Potential ab, wie der äußere Pol $A_0\left(\frac{a}{c}, \frac{a^2}{c}\right)$ und auf der inneren Fläche (b) dasselbe wie der innere Pol $B_0\left(\frac{b}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$. Aber nun hat A_0 auf der inneren Fläche (b) ein ungehöriges Potential abgelegt, das durch einen inneren Pol $B_1\left(-\frac{b}{a}, \frac{b^2 c}{a^2}\right)$ weggeschafft wird; und B_0 hat auf der äußern Fläche (a) ein ungehöriges Potential abgelegt, das durch einen äußern Pol $A_1\left(-\frac{a}{b}, \frac{a^2 c}{b^2}\right)$ getilgt wird. Aber diese Pole B_1 und A_1 legen wieder auf der äußern, innern Fläche negative Potentiale ab, die von den mit positiven Massen begabten Polen $A_2\left(\frac{a^2}{bc}, \frac{a^4}{b^2 c}\right)$, $B_2\left(\frac{b^2}{ac}, \frac{b^4}{a^2 c}\right)$ getilgt werden. Und so fort ohne Ende. Man bekommt folgende allgemeine Ausdrücke für die Pole:

$$A_{2m-1}\left(-\frac{a^m}{b^m}, \frac{a^{2m}c}{b^{2m}}\right);\quad B_{2m-1}\left(-\frac{b^m}{a^m}, \frac{b^{2m}c}{a^{2m}}\right),\quad \text{für } m = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$A_{2m}\left(\frac{a^{m+1}}{b^m c}, \frac{a^{2m+2}}{b^{2m}c}\right);\qquad B_{2m}\left(\frac{b^{m+1}}{a^m c}, \frac{b^{2m+2}}{a^{2m}c}\right),\quad \text{für } m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Es sei nun $P(r, \theta, \psi)$ ein Punkt im leeren Raume, also $b < r < a$, und in bezug auf denselben soll das Potential aller dieser Massen hergestellt werden.

1. Potential V_a^{2m} aller Massenpunkte A_{2m}.
(Die Punkte liegen außerhalb der Kugel (a))

$$V_a^{2m} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\frac{a^{m+1}}{b^m c}}{\sqrt{r^2 - 2r\,\frac{a^{2m+2}}{b^{2m}c}\cos\theta + \left(\frac{a^{2m+2}}{b^{2m}c}\right)^2}},$$

und die Entwicklung nach Kugelfunktionen gibt

$$V_a^{2m} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{r^n c^n}{a^{2n+1}} P^n(\cos\theta) \cdot \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{b^{(2n+1)m}}{a^{(2n+1)m}}\right];$$

hier ist aber

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{b^{(2n+1)m}}{a^{(2n+1)m}} = \frac{a^{2n+1}}{a^{2n+1} - b^{2n+1}};$$

daher

$V_a^{2m} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{r^n c^n}{a^{2n+1} - b^{2n+1}} P^n(\cos\theta)$; diese Summe konvergiert wie $\sum^{n=\infty} \left(\frac{rc}{a^2}\right)^n P^n(\cos\theta)$.

2. Potential V_b^{2m} aller Massenpunkte B_{2m}.
(Die Punkte B_{2m} liegen innerhalb der Kugel (b))

$$V_b^{2m} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\frac{b^{m+1}}{a^m c}}{\sqrt{r^2 - 2r\,\frac{b^{2m+2}}{a^{2m}c}\cos\theta + \left(\frac{b^{2m+2}}{a^{2m}c}\right)^2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{b^{2n+2}}{r^{n+1}c^{n+1}} P^n(\cos\theta) \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{b^{(2n+1)m}}{a^{(2n+1)m}}\right];$$

hier ist nun

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b^{(2n+1)m}}{a^{(2n+1)m}} = \frac{a^{2n+1}}{a^{2n+1} - b^{2n+1}};$$

folglich ist

$$V_b^{2m} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(ab)^{2n+1}}{(cr)^{n+1}(a^{2n+1} - b^{2n+1})} \cdot P^n(\cos\theta).$$

Die Reihe konvergiert wie $\sum^{n=\infty} \frac{b^{2n}}{(cr)^n} P^n(\cos\theta)$.

3. Potential V_a^{2m-1} aller Massenpunkte A_{2m-1} (für $m = 1, 2, 3, \ldots$).
(Diese Punkte liegen außerhalb der Kugel (a))

$$V_a^{2m-1} = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{-\frac{a^m}{b^m}}{\sqrt{r^2 - 2r\cdot\frac{a^{2m}c}{b^{2m}}\cos\theta + \left(\frac{a^{2m}c}{b^{2m}}\right)^2}} = \sum_{m=0}^{m=\infty}\left[-\frac{a^m}{b^m}\cdot\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{r^n b^{2m(n+1)}}{a^{2m(n+1)}c^{n+1}} P^n(\cos\theta)\right],$$

oder

$$V_a^{2m-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left[-\frac{r^n}{c^{n+1}} P^n(\cos\theta) \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{b^{(2n+1)m}}{a^{(2n+1)m}}\right];$$

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{b^{(2n+1)m}}{a^{(2n+1)m}} = \frac{b^{2n+1}}{a^{2n+1}} \cdot \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{b^{(m-1)(2n+1)}}{a^{(m-1)(2n+1)}} = \frac{b^{2n+1}}{a^{2n+1}} \cdot \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{b^{m(2n+1)}}{a^{m(2n+1)}} = \frac{b^{2n+1}}{a^{2n+1} - b^{2n+1}},$$

somit

$$V_a^{2m-1} = -\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b^{2n+1} r^n}{c^{n+1}(a^{2n+1} - b^{2n+1})} \cdot P^n(\cos\theta)$$

und konvergiert wie

$$\sum^{n=\infty} \left(\frac{b^2 r}{a^2 c}\right)^n P^n(\cos\theta).$$

4. Potential aller Massenpunkte B_{2m-1} (für $m = 1, 2, 3, \ldots$).
(Diese Punkte liegen innerhalb der Kugel (b))

$$V_b^{2m-1} = \sum_{m=1}^{m=\infty} - \frac{\frac{b^m}{a^m}}{\sqrt{r^2 - 2r\frac{b^{2m}c}{a^{2m}}\cos\theta + \left(\frac{b^{2m}c}{a^{2m}}\right)^2}} = \sum_{m=1}^{m=\infty} - \left[\frac{b^m}{a^m} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b^{2mn} c^n}{a^{2mn} r^{n+1}} \cdot P^n(\cos\theta)\right];$$

$$V_b^{2m-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[-\frac{c^n}{r^{n+1}} P^n(\cos\theta) \cdot \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{b^{(2n+1)m}}{a^{(2n+1)m}}\right] = -\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b^{2n+1} c^n}{r^{n+1}(a^{2n+1} - b^{2n+1})} P^n(\cos\theta),$$

und konvergiert wie die Summe $\sum^{n=\infty} \left(\frac{c}{r} \cdot \frac{b^2}{a^2}\right)^n P^n(\cos\theta)$.

Das Gesamtpotential aller Massenpunkte ist daher

$$V = V_a^{2m} + V_b^{2m} + V_a^{2m-1} + V_b^{2m-1} \quad \text{oder}$$

$$V(r, \theta, \psi) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(cr)^{2n+1} + (ab)^{2n+1} - b^{2n+1}(r^{2n+1} + c^{2n+1})}{(cr)^{n+1} \cdot (a^{2n+1} - b^{2n+1})} \cdot P^n(\cos\theta).$$

Dieser Ausdruck für das Potential stimmt mit der *Heine*schen Formel (hier unter Gleichung I) überein, wenn man dort $\bar{\alpha} = 0$, also $\zeta = \theta$ setzt; V hat im Zwischenraum überall einen endlichen Wert, also auch im fingierten Pole $(c, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$. Für $r = a$ oder $r = b$ verwandelt sich der Ausdruck für V resp. in

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c^n}{a^{n+1}} P^n(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 2ac\cos\theta + a^2}};$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b^n}{c^{n+1}} P^n(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{c^2 - 2bc\cos\theta + b^2}},$$

also in die gegebenen Potontialbelegungen der zwei Flächen.

Berechnung der Dichtigkeiten und der Massen auf den beiden Kugelflächen.

Um die Dichtigkeiten der zwei Belegungen zu bestimmen, muß man sich diese allein vorhanden und die Hilfspole A und B (mit Zeigern), die nur dazu dienten, das Potential V_0 im Zwischenraume zu berechnen, weggeschafft denken. Bedeutet dann V_1 das Potential beider Belegungen im ganzen Raume außerhalb der äußeren Kugelfläche, V_2 dasjenige im ganzen von der inneren Fläche umschlossenen Raume und setzt man

$$V_1 = \sum_{n=0}^{n=\infty} V_1^n, \text{ wo } V_1^n = \frac{c^n}{r^{n+1}} P^n(\cos\theta); \quad V_2 = \sum_{n=0}^{n=\infty} V_2^n, \text{ wo } V_2^n = \frac{r^n}{c^{n+1}} P^n(\cos\theta) \text{ ist;}$$

ebenso sei k_1 die Dichtigkeit der Belegung der äußern Fläche und k_2 die der innern, und setzt man

$$k_1 = \sum_{n=0}^{n=\infty} k_1^n; \quad k_2 = \sum_{n=0}^{n=\infty} k_2^n; \text{ dann ist}$$

$$k_1^n = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(V_0^n - V_1^n) \text{ für } r = a \text{ und}$$

$$k_2^n = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(V_2^n - V_0^n) \text{ für } r = b; \text{ es ist aber}$$

$$V_0^n - V_1^n = \frac{1}{c^{n+1}} \frac{c^m - b^m}{a^m - b^m} \cdot \left(r^n - \frac{a^m}{r^{n+1}}\right) P^n(\cos\theta); \quad (m = 2n+1)$$

$$V_2^n - V_0^n = \frac{1}{c^{n+1}} \frac{a^m - c^m}{a^m - b^m} \cdot \left(r^n - \frac{b^m}{r^{n+1}}\right) P^n(\cos\theta), \text{ folglich}$$

$$k_1^n = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{a^{n-1}(c^{2n+1} - b^{2n+1})}{c^{n+1} \cdot (a^{2n+1} - b^{2n+1})} \cdot P^n(\cos\theta);$$

$$k_2^n = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{b^{n-1} \cdot (a^{2n+1} - c^{2n+1})}{c^{n+1} \cdot (a^{2n+1} - b^{2n+1})} \cdot P^n(\cos\theta).$$

Die Reihen für k_1 und k_2 konvergieren nach Art geometrischer Reihen mit den Quotienten $\frac{c}{a}$ und $\frac{b}{c}$.

Die Gesamtmasse der äußern belegten Kugelfläche ist

$$M_a = \iint k_1 a^2 \delta;$$

weil aber $\iint P^n(\cos\theta)\,\delta = 0$ ist für $n = 1, 2, 3, \ldots$, so ist die Gesamtmasse

$$M_a = \frac{a}{c} \cdot \frac{c-b}{a-b}.$$

Ebenso erhält man für die Gesamtmasse M_b der innern belegten Kugelfläche (b) den Wert

$$M_b = \frac{b}{c} \frac{a-c}{a-b}$$

und als Summe aller Massen beider belegten Kugelflächen

$$M = M_a + M_b = \frac{c(n-1)}{c(n-1)} = 1,$$

also gleich derjenigen des fingierten Poles.

JUL 24 1926

PERIODICAL ROOM
GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Hasse, Schäfer, Schlesinger, Schottky

von

K. Hensel.

Band 155.

Heft 4.

Ausgegeben den 8. Juni

Berlin und Leipzig

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG - J. GUTTENTAG VERLAGS-BUCHHANDLUNG - GEORG REIMER - KARL J. TRÜBNER - VEIT & COMP.

1926

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 155. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

Hasse, Helmut, Über die Einzigkeit der beiden Fundamentalsätze der elementaren Zahlentheorie . . . . . Seite — 199

Roeser, E., Über Koordinatensysteme im unendlich fernen und im imaginären Teil der *Bolyai-Lobatschefski*schen Ebene . . . . . — 221

Disse, A., Das Fundamentalsystem für die Logarithmen eines $\mathfrak{p}$-adischen algebraischen Körpers und sein Regulator . . . . . — 225

An unsere Mitarbeiter!

Um ein schnelles Erscheinen der einzelnen Hefte des Journals zu ermöglichen, können wir den Herren Autoren grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge zustellen. Da die Korrekturen seitens der Redaktion, auch hinsichtlich ihres Inhalts, mit größter Genauigkeit gelesen werden, hoffen wir auch so, allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Über die Einzigkeit der beiden Fundamentalsätze der elementaren Zahlentheorie.

Von *Helmut Hasse* in Halle (Saale).

Im Mittelpunkte der elementaren, mit den rationalen Zahlen beschäftigten Zahlentheorie steht einerseits der *Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primfaktoren*, andererseits das *quadratische Reziprozitätsgesetz.* Ich bezeichne diese beiden Sätze im folgenden als *1. und 2. Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie.* Die nachstehenden Betrachtungen verfolgen den Zweck, diese beiden Fundamentalsätze von einem höheren Gesichtspunkt aus zu überschauen, der sie gewissen der Analysis entnommenen Begriffsbildungen unterordnet, und ihre Einzigkeit von diesem Standpunkt aus darzutun.

Faßt man die in dem Worte: *Zahlentheorie* liegende Aufgabe im weitesten Sinne, so wird die *Untersuchung der Eigenschaften der Zahlen* gefordert, wobei es genügt, unter *Zahlen* die *natürlichen Zahlen* zu verstehen, auf die sich alle weiteren Zahlen zurückführen lassen. Unter diese Aufgabe fallen dann alle, mit Zahlen beschäftigten Disziplinen der Mathematik, also außer dem gewöhnlich unter *Zahlentheorie* (*im engeren Sinne*) verstandenen Komplex die gesamte *Analysis* [1]). Daß die Analysis in der Tat kein gegenüber der Zahlentheorie i. e. S. streng abgrenzbares Gebiet ist, zeigt schon das bisher nicht zu umgehende Auftreten analytischer Beweise für rein zahlentheoretische Sätze, wird aber auch durch die folgenden, in die Grundlagen hinuntersteigenden Ausführungen verständlich.

Wir denken uns die natürlichen Zahlen auf mengentheoretischer Grundlage definiert. Welchen der so möglichen Wege (*Dedekind*, *Zermelo*, *Russell*) man auch geht, immer sind es zwei Grundtatsachen die dabei hervortreten: Die *Anordnung* und die beiden *Rechenoperationen Addition und Multiplikation.* Auf Grund der letzteren werden in bekannter Weise die *rationalen Zahlen* eingeführt, während die erstere bei der dann erfolgenden Einführung der *reellen Zahlen* ausschlaggebend ist. Eine rein aufbauende Betrachtung wird diese Tatsachen hinnehmen und von ihnen bei der Untersuchung der Eigenschaften der Zahlen Gebrauch machen; eine rückschauende Betrachtung, wie wir sie vorhaben, wird die Auswirkungen

[1]) Nicht aber die *Algebra*; diese ist abgesehen von ihrer selbständigen Bedeutung eine bloße Hilfswissenschaft der Zahlentheorie; denn jedenfalls nach der modernen Auffassung sind ihre Objekte nicht Zahlen, sondern formale Gesetze des Rechnens mit Zahlen, wie sie in den Definitionen der in der Algebra studierten Bereiche: Körper, Integritätsbereiche, Ringe, Gruppen usw. zugrundegelegt werden.

dieser beiden Tatsachen in dem weiteren Aufbau der Zahlentheorie genau verfolgen wollen. Das geschieht, indem jenen beiden Grundtatsachen entsprechende, abstrakte Begriffe gebildet werden, die von der *inhaltlichen* Bedeutung der in ihnen vorkommenden Elemente als Zahlen frei sind, und die einzig und allein den in ihnen liegenden *formalen* Gehalt verkörpern. So entspringt aus dem Tatbestande der Rechenoperationen, wie er nach der Erweiterung auf die rationalen Zahlen vorliegt, der Begriff des *Körpers* als eines abstrakten Elementbereiches K, in dem für je zwei Elemente a, b zwei Verknüpfungen $a + b$, $a \cdot b$ erklärt sind, die den formalen Gesetzen genügen:

(1) $a + b = b + a$ (3) $a \,.\, b = b \,.\, a$

(2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (4) $(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)$

(5) $a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c.$

(6) $a + x = b$ ist stets und eindeutig durch ein x aus K lösbar.

(7) $a \,.\, x = b$ ist für $a \neq 0$[1]) stets und eindeutig durch ein x aus K lösbar.

Aus dem Tatbestande, wie er bei der ebenfalls auf den Körper der rationalen Zahlen erweiterten Anordnung vorliegt, entspringt ferner der Begriff des *geordneten Körpers* als eines Körpers, für dessen Elemente noch eine Anordnungsrelation $a < b$ erklärt ist, die den formalen Gesetzen genügt:

(8) Es ist stets $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$ mit gegenseitigem Ausschluß.
(9) Aus $a < b$, $b < c$ folgt $a < c$.
(10) Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$.
(11) Aus $a < b$, $0 < c$ folgt $ac < bc$.

Auf den in (1)—(11) zusammengefaßten Tatsachenkomplex, der bei den rationalen Zahlen erfüllt ist, baut bekanntlich die reelle Analysis auf, indem sie auf Grund von (1)—(11) die Erweiterung zum ebenfalls geordneten Körper der reellen Zahlen vornimmt. Die elementare Zahlentheorie i. e. S. scheint zunächst, dem Gehalt der in ihr behandelten Sätze, insbesondere der beiden Fundamentalsätze nach, lediglich auf den in (1)—(7) liegenden Tatsachenkomplex gestützt. Daß dies in Wahrheit nicht der Fall ist, zeigt schon der Beweis des 1. Fundamentalsatzes, in dem neben der notwendig zu benutzenden inhaltlichen Bedeutung der Körperelemente als rationale Zahlen gerade auch die Anordnungsgesetze der rationalen Zahlen unentbehrlich sind (Euklidischer Algorithmus, Endlichkeit der Teilerzahl).

Teil I.

Es ist nun aber eigentlich nicht die Tatsache, daß die rationalen Zahlen einen *geordneten* Körper bilden, die beim Beweis des 1. Fundamentalsatzes ausschlaggebend ist, sondern vielmehr nur die Tatsache, daß sich für sie ein *absoluter Betrag* einführen läßt. Um die Auswirkung dieser Tatsache in der Zahlentheorie zu untersuchen, hat man wieder aus den beim absoluten Betrag vorliegenden Verhältnissen einen abstrakten Begriff zu schaffen. So entsteht der Begriff: *bewerteter Körper* [2]), den wir hier, etwas abweichend von dem bisher üblichen, folgendermaßen fassen:

[1]) Die Existenz des Elements 0 in K folgt bekanntlich aus (1), (2), (6).
[2]) *Kürschák*, ds. Journ. Bd. 142 (1913).

Es sei K ein geordneter Körper, in dem keine im Vergleich zu den rationalen Zahlen [1]) „unendlich-kleinen" oder „unendlich-großen" Elemente vorkommen, d. h.

(12) Aus $0 \leqq a < \varepsilon$ für jedes rationale $\varepsilon > 0$ aus K folgt $a = 0$.

Einen solchen Körper K nennen wir kurz einen *Wertkörper*. Wenn nun in einem Körper K eine solche Funktion $\varphi(a)$ der Elemente a von K mit Werten aus K (also eine Abbildung von K auf Elemente aus K) existiert, daß

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(a) > 0 \quad \text{für} \quad a \neq 0 \tag{13}$$

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \tag{14}$$

$$\varphi(a + b) \leqq \varphi(a) + \varphi(b) \tag{15}$$

ist, so nennen wir K einen *durch die Bewertung φ bewerteten Körper*. Hiernach ist speziell jeder Wertkörper K durch die Funktion

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(a) = a \text{ für } a > 0, \quad \varphi(a) = -a \text{ für } a < 0$$

bewertet. Wir nennen dies die *absolute Bewertung* des Wertkörpers und gebrauchen für sie das übliche Zeichen $|a|$. Ferner besitzt jeder Körper die *identische Bewertung*

$$\varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_0(a) = 1 \text{ für } a \neq 0.$$

Als Folge aus (15) nennen wir noch die für jede Bewertung φ von K gültige Relation

$$\varphi(a - b) \geqq |\varphi(a) - \varphi(b)|, \tag{15'}$$

durch die φ mit der absoluten Bewertung des Wertkörpers verbunden ist.

Jede Bewertung φ eines Körpers K führt zu einem bewerteten (nicht notwendig echten) Erweiterungskörper $\overline{K}$ von K nach dem Schema der *Cantor*schen Erweiterung des rationalen zum reellen Zahlkörper. Nennt man nämlich in Übertragung des gewöhnlichen Konvergenzbegriffes eine Elementfolge (a_n) aus K *konvergent*, bzw. das Element a aus K ihren *Grenzwert* ($a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$) bezüglich φ, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ aus K ein $n_0(\varepsilon)$ existiert, so daß

$$\varphi(a_{n+m} - a_n) < \varepsilon \text{ für alle } n \geqq n_0(\varepsilon),\ m > 0 \tag{16}$$

bzw.

$$\varphi(a - a_n) < \varepsilon \text{ für alle } n \geqq n_0(\varepsilon), \tag{17}$$

so ist zwar jede Folge mit Grenzwert konvergent, aber es hat nicht notwendig jede konvergente Folge einen Grenzwert. Wenn letzteres stets der Fall ist, heißt K perfekt bezgl. φ. Definiert man nun im Bereich $\overline{K}$ aller bezgl. φ konvergenten Folgen (a_n) aus K die Gleichheit durch die Festsetzung

$$(a_n) = (b_n), \quad \text{wenn} \quad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0 \tag{18}$$

und die Rechenoperationen Addition und Multiplikation durch die bezgl. (18) eindeutigen Festsetzungen

$$\begin{cases} (a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \\ (a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n), \end{cases} \tag{19}$$

so ist $\overline{K}$ ein Körper bezgl. (18), (19) und enthält in Gestalt aller konvergenten Folgen (a_n) mit Grenzwert a einen auf Grund der Zuordnung $(a_n) \longleftrightarrow a$ zu K

[1]) Ein geordneter Körper hat notwendig die Charakteristik 0, enthält also einen zum rationalen Körper isomorphen Teilkörper.

isomorphen Teilkörper. Vollzieht man ferner für den Wertkörper K bezüglich dessen absoluter Bewertung die entsprechende Erweiterung zu einem Körper $\overline{\mathsf{K}}$, der durch die Festsetzung:

(20) $(a_n) < (\beta_n)$, wenn $a_n + \varepsilon < \beta_n$ mit einem festen $\varepsilon > 0$ von einem n_0 an, die für den Teilkörper K mit der in K bestehenden Anordnungsvorschrift übereinstimmt, geordnet wird und sich überdies ebenfalls als Wertkörper herausstellt, so induziert die Bewertung φ von K durch die Festsetzung

$$(21) \qquad \varphi(\bar{a}) = (\varphi(a_n)) \quad \text{für} \quad \bar{a} = (a_n)$$

eine Bewertung $\overline{\varphi}$ von $\overline{K}$ mit dem Wertkörper $\overline{\mathsf{K}}$, die für den Teilkörper K mit der Bewertung φ von K übereinstimmt. Bezüglich dieser induzierten Bewertung gilt:

$$(22) \qquad \bar{a} = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{für} \quad \bar{a} = (a_n),$$

so daß die eben gegebene Definition (21) von $\overline{\varphi}$ auch in der Form

$$(21') \qquad \varphi(\bar{a}) = \lim_{n\to\infty} \varphi(a_n) \quad \text{für} \quad \bar{a} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

geschrieben werden kann, wo die erstere Grenzrelation bezgl. der durch die absolute Bewertung von K induzierten, nach (20) ebenfalls absoluten Bewertung von $\overline{\mathsf{K}}$ zu verstehen ist. Nach (22) *lassen sich die Elemente $\bar{a}$ von $\overline{K}$ sämtlich als Grenzwerte bezgl. $\overline{\varphi}$ von bezgl. φ konvergenten Folgen aus K darstellen*[1]). Schließlich erweist sich der *Körper $\overline{K}$ als bezgl. $\overline{\varphi}$ perfekt.* Man nennt $\overline{K}$ den *derivierten Körper* bezgl. φ zu K.

Der identischen Bewertung φ_0 von K entspricht natürlich K selbst als derivierter Körper. Ebenso ist ein bezgl. φ perfekter Körper mit seinem derivierten identisch. Zwei Bewertungen, bezgl. deren Konvergenz- und Grenzwertrelationen gleichbedeutend sind, nennen wir *äquivalent.* Äquivalente Bewertungen führen zu demselben derivierten Körper (aber, wie das Beispiel der identischen und einer anderen Bewertung eines bezgl. der letzteren perfekten Körpers zeigt, nicht notwendig umgekehrt).

Der rationale Zahlkörper, den wir im folgenden durchweg mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen, besitzt zunächst die absolute Bewertung $|a|$, für die wir aus später ersichtlichen, bezeichnungstechnischen Gründen $\varphi_\infty(a)$ schreiben wollen. Ihr entspricht als derivierter Körper der reelle Zahlkörper $\mathfrak{R}_\infty$.

Aus (12) folgert man leicht, daß der derivierte Körper $\overline{\mathsf{K}}$ jedes Wertkörpers K zum reellen Zahlkörper isomorph ist. Jeder Wertkörper K ist also zu einem Teilkörper des reellen Zahlkörpers isomorph und kann infolgedessen durch reelle Zahlen repräsentiert oder sogar, da der Übergang zu einem K umfassenden Wertkörper $\overline{\mathsf{K}}$ für die mittels K erklärten Bewertungen nichts ausmacht (vgl. Anm. 1), direkt als der reelle Zahlkörper angenommen werden[2]), was im folgenden geschehen

---

[1]) Da bei $\overline{\varphi}$ in (16), (17) alle $\bar{\varepsilon} > 0$ aus $\overline{\mathsf{K}}$, bei φ nur alle $\varepsilon > 0$ aus K in Betracht zu ziehen sind, sind φ und $\overline{\varphi}$, obwohl sie für die Elemente aus K dieselben Werte haben, zunächst zu unterscheiden. Diese Unterscheidung wird aber unnötig, weil nach (12) Konvergenz- und Grenzwertrelationen in K bezgl. φ und $\overline{\varphi}$ gleichbedeutend sind. Wir schreiben daher im folgenden auch einfach φ für $\overline{\varphi}$.

[2]) Aus diesem Grunde wurde in der Bewertungstheorie bisher der Wertkörper K gleich von vorneherein als der reelle Zahlkörper angenommen. Die vorstehenden Ausführungen, die übrigens

soll. Der reelle Zahlkörper tritt dann im folgenden unter zwei verschiedenen Gesichtspunkten auf, einerseits als derivierter Körper $\mathfrak{R}_\infty$ für *eine spezielle Bewertung* des unserer Untersuchung zugrunde liegenden rationalen Zahlkörpers $\mathfrak{R}$, andererseits als Wertkörper K für *alle Bewertungen* von $\mathfrak{R}$. Wir halten aus methodischen Gründen an diesem Unterschied auch in den Bezeichnungen $\mathfrak{R}_\infty$, K fest.

Wie eben schon angedeutet, besitzt $\mathfrak{R}$ außer der absoluten Bewertung

$$\varphi_\infty(a) = |a| = e^{\lg|a|}, \quad (a \neq 0) \tag{23 a}$$

und den zu ihr äquivalenten

$$\Phi_\infty(a) = \varphi_\infty^{s_\infty}(a) = |a|^{s_\infty} = e^{s_\infty \lg|a|}, \quad (a \neq 0) \tag{24 a}$$

mit einem reellen, der Bedingung $0 < s_\infty \leqq 1$ unterworfenen Parameter s_∞ noch weitere, hierzu und zur identischen Bewertung nicht äquivalente Bewertungen, deren Existenz man aus dem 1. Fundamentalsatz erschließt. Nach diesem Satz besitzt nämlich, wenn p eine feste, positive rationale Primzahl ist, jede rationale Zahl $a \neq 0$ eine eindeutige Darstellung:

$$a = p^{\alpha_p(a)} a_0, \quad (\alpha_p(a) \text{ ganz-rational}, \quad a_0 \text{ prim zu } p),$$

wo die Funktion $\alpha_p(a)$ — an dieser Bezeichnung halten wir im folgenden fest — die sog. *Ordnungszahl* von a für p ist. Setzt man dann

$$\varphi_p(a) = p^{-\alpha_p(a)} = e^{-\alpha_p(a)\lg p}, \quad (a \neq 0), \tag{23 b}$$

so ist das eine Bewertung von $\mathfrak{R}$, aus der die Serie äquivalenter Bewertungen

$$\Phi_p(a) = \varphi_p^{s_p}(a) = p^{-s_p\alpha_p(a)} = e^{-s_p\alpha_p(a)\lg p}, \quad (a \neq 0) \tag{24 b}$$

mit einem reellen, der Bedingung $s_p > 0$ unterworfenen Parameter s_p entspringt. Der zugehörige derivierte Körper $\mathfrak{R}_p$ ist der *Hensel*sche Körper der p-adischen Zahlen. Wir setzen für das folgende fest, daß der Buchstabe p alle positiven rationalen Primzahlen inkl. des Symbols ∞ durchläuft; dann sind wegen der Verschiedenheit (Nicht-Isomorphie) der derivierten Körper $\mathfrak{R}_p$ untereinander und von $\mathfrak{R}$ die sämtlichen Bewertungen φ_p untereinander und zu φ_0 inäquivalent. Herr *Ostrowski* hat gezeigt[1]), *daß $\mathfrak{R}$ außer den Φ_p keine weiteren Bewertungen besitzt.* Die Φ_p bilden somit bei jeder festen Wahl der Parameter s_p ein vollständiges Repräsentantensystem von untereinander und zur identischen nicht äquivalenten Bewertungen von $\mathfrak{R}$.

Für das *normierte* Repräsentantensystem φ_p gilt nun auf Grund des 1. Fundamentalsatzes das *Produkttheorem*

$$\prod_p \varphi_p(a) = \varphi_0(a). \tag{25}$$

Fordert man das Bestehen der entsprechenden Relation

$$\prod_p \Phi_p(a) = \varphi_0(a) \tag{26}$$

---

unter Berufung auf die bekannte *Cantor*sche Theorie der Fundamentalreihen knapp gehalten werden durften, zeigen aber, daß man die *Cantor*sche Theorie der reellen Zahlen in den Aufbau der allgemeinen Bewertungstheorie und die darin erfolgende Konstruktion des derivierten Körpers als Spezialfall einbeziehen kann, ohne sie voraussetzen zu müssen.

[1]) Acta math. 41 (1917).

für ein nicht in der speziellen Weise (23 a, b) normiertes vollständiges Repräsentantensystem Φ_p untereinander und zur identischen nicht-äquivalenter Bewertungen von $\mathfrak{R}$, so folgt durch Einsetzen aller Primzahlen p für a, daß alle s_p einem einzigen reellen Parameter s (nämlich s_∞) gleich sein müssen. Wir können somit das Ergebnis unserer bisherigen, den 1. Fundamentalsatz rückschauend einbeziehenden Betrachtungen in folgendem Theorem zusammenfassen:

(I.) *Das allgemeinste vollständige Repräsentantensystem untereinander und zur identischen nicht-äquivalenter Bewertungen des rationalen Zahlkörpers wird durch*

$$(24\,\text{a, b}) \qquad \Phi_p(0) = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_\infty(a) = \varphi_\infty^{s_\infty}(a) = e^{s_\infty \lg |a|} \\ \Phi_p(a) = \varphi_p^{s_p}(a) = e^{-s_p a_p(a) \lg p} \end{array} \right\} \quad \textit{für } a \neq 0$$

gegeben, wenn die verfügbaren Parameter s_p irgendwie als reelle, den Bedingungen $s_p > 0$, $0 < s_\infty \leqq 1$ unterworfene Zahlen gewählt werden. Wählt man die s_p alle gleich einem reellen, der Bedingung $0 < s \leqq 1$ unterworfenen s, so gilt für die so normierten

$$\Phi_p(a) = \varphi_p^s(a)$$

das mit dem 1. Fundamentalsatz äquivalente Produkttheorem

$$(26) \qquad \prod_p \Phi_p(a) = \varphi_0(a).$$

Umgekehrt müssen, damit dieses Produkttheorem gilt, die Parameter s_p wie angegeben gewählt werden.

Teil II.

Wir wenden uns nunmehr zur Einbeziehung auch des 2. Fundamentalsatzes in den Kreis unserer Betrachtungen. Dazu haben wir unsere der Analysis entnommen Begriffsbildungen auf der Grundlage der Bewertungstheorie weiter auszubauen. In einem durch φ bewerteten Körper K kann man neben den bisher aus der Analysis herangezogenen Begriffen Konvergenz und Grenzwert auch den Begriff *stetige Funktion* sinngemäß erklären. Um „unvernünftige" Funktionen auszuschließen, ist es dabei zweckmäßig, als Argumentmenge nicht nur den Körper K, sondern den zu φ gehörigen derivierten Körper $\overline{K}$ zugrundezulegen. Wir unterscheiden dann zwei Arten bezgl. φ stetiger Funktionen in $\overline{K}$:

1. *stetige Abbildungen von $\overline{K}$ auf Elemente von $\overline{K}$*, d. h. Funktionen ψ der Elemente von $\overline{K}$ mit Werten aus $\overline{K}$, die der Bedingung genügen:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{zu jedem } a_0 \text{ aus } \overline{K} \text{ und } \varepsilon > 0 \text{ aus } \mathsf{K} \text{ existiert ein } \delta(a_0, \varepsilon) > 0 \text{ aus } \mathsf{K}, \text{ so daß} \\ \varphi(\psi(a) - \psi(a_0)) < \varepsilon \quad \text{für} \quad \varphi(a - a_0) < \delta(a_0, \varepsilon), \end{array} \right.$$

2. *stetige Abbildungen von $\overline{K}$ auf Elemente des Wertkörpers* K (*also auf reelle Zahlen*), d. h. Funktionen χ der Elemente von $\overline{K}$ mit Werten aus K, die der Bedingung genügen:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{zu jedem } a_0 \text{ aus } \overline{K} \text{ und } \varepsilon > 0 \text{ aus } \mathsf{K} \text{ existiert ein } \delta(a_0, \varepsilon) > 0 \text{ aus } \mathsf{K}, \text{ so daß} \\ |\chi(a) - \chi(a_0)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \varphi(a - a_0) < \delta(a_0, \varepsilon). \end{array} \right.$$

Offenbar ist $\psi_2(\psi_1(a))$ mit ψ_1 und ψ_2 stetig von der 1. Art und $\chi(\psi(a))$ mit χ stetig von der 2. Art, wenn ψ stetig von der 1. Art ist. Die einfachste stetige Funktion 1. Art, für die nämlich (27) trivial wird, ist die identische Abbildung $\psi_0(a) = a$

von $\overline{K}$ auf sich. Ebenso ist die einfachste stetige Funktion 2. Art die Bewertung φ selbst, für die (28) auf Grund von (15′) trivial wird.

Die Theorie der bezgl. der Bewertungen φ_p des rationalen Zahlkörpers $\mathfrak{R}$ stetigen Funktionen 1. Art ist durch Herrn *Hensel*[1]) weitgehend entwickelt und ihre Bedeutung für die Zahlentheorie i. e. S. von $\mathfrak{R}$ klargelegt worden, so daß wir hier auf eine nähere Ausführung verzichten können. Sie führt zu der weiter unten zu benutzenden, *eindeutigen multiplikativen Darstellung*[2]) *der Elemente* $a \neq 0$ *eines* $\mathfrak{R}_p$ *in der Form*:

$$\text{(a)}\quad p = \infty: \quad a = e^{\alpha_\infty(a)}(-1)^{\beta_\infty(a)}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha_\infty(a) \text{ in } \mathfrak{R}_\infty \\ \beta_\infty(a) \text{ mod. } 2\end{pmatrix}^{3})$$

$$\text{(b)}\quad p = 2: \quad a = 2^{\alpha_2(a)}(-1)^{\beta_2(a)}(1+2^2)^{\gamma_2(a)}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha_2(a) \text{ ganz-rational} \\ \beta_2(a) \text{ mod. } 2 \\ \gamma_2(a) \text{ ganz in } \mathfrak{R}_2\end{pmatrix}$$

$$\text{(c)}\quad p = q: \quad a = q^{\alpha_q(a)} r_q^{\beta_q(a)}(1+q)^{\gamma_q(a)}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha_q(a) \text{ ganz-rational} \\ \beta_q(a) \text{ mod. } q-1 \\ \gamma_q(a) \text{ ganz in } \mathfrak{R}_q\end{pmatrix},$$

wobei hier wie im folgenden q die *ungeraden* positiven rationalen Primzahlen durchläuft, r_q eine feste der in $\mathfrak{R}_q$ vorhandenen primitiven $(q-1)$-ten Einheitswurzeln ist und die in den Exponenten auftretenden Funktionen von a — an deren Bezeichnung im folgenden festgehalten wird — den angegebenen Bedingungen genügen[4]).

Während die Theorie der bezgl. der φ_p stetigen Funktionen 1. Art in $\mathfrak{R}$ mit den Beziehungen der rationalen Zahlen zu *je einem einzelnen* p (also mit den sozusagen *lokalen* Eigenschaften der rationalen Zahlen) eng zusammenhängt, ist die Theorie der bezgl. der φ_p stetigen Funktionen 2. Art in $\mathfrak{R}$ mit den viel tiefer liegenden Beziehungen der rationalen Zahlen zu *allen* p *gleichzeitig* (also den sozusagen *integralen* Eigenschaften der rationalen Zahlen) aufs innigste verknüpft[5]). Es hat

---

[1]) „Zahlentheorie", Berlin 1913.

[2]) *Hensel* l. c. und ds. Journ. Bd. 146, S. 190—195.

[3]) Nach einem mündlichen Vorschlag von Herrn *Hensel* wähle ich hier die Bezeichnung $\alpha_\infty(a)$ statt der bisher von Herrn *Hensel* und mir verwendeten $\gamma_\infty(a)$; in der Tat entspricht der Faktor $e^{\alpha_\infty(a)} = \varphi_\infty(a)$ *inhaltlich* besser den ersten Faktoren $2^{\alpha_2(a)} = \frac{1}{\varphi_2(a)}$, $q^{\alpha_q(a)} = \frac{1}{\varphi_q(a)}$ in (b) und (c) als den letzten, zu denen vermöge des Wertbereichs der Exponenten nur eine stärkere *formale* Analogie besteht.

[4]) Die $\alpha_p(a)$ haben für $p \neq \infty$ dieselbe Bedeutung wie bisher; der Einheitlichkeit halber ist ferner $\alpha_\infty(a)$ für $\lg|a|$ geschrieben.

[5]) Es sei auf die von Herrn *Hensel* gern als Ausgangspunkt seiner Theorie der p-adischen Zahlen hingestellte Analogie der Theorie des rationalen Zahlkörpers $\mathfrak{R}$ zu der des Körpers $\mathfrak{Z}$ aller rationalen Funktionen einer komplexen Variablen z mit komplexen Zahlkoeffizienten hingewiesen (vgl. z. B. dessen „Theorie der algebraischen Zahlen", Leipzig 1908, Vorrede und Cap. I, § 1), bei der den einzelnen p die einzelnen Stellen $z = a$ der komplexen Zahlenebene und insbesondere $p = \infty$ die Stelle $z = \infty$ entspricht. Auch in der Theorie von $\mathfrak{Z}$ sind die Sätze integralen Charakters — (z. B. das dortige Analogon zum 1. Fundamentalsatz und der Satz, daß eine an allen Stellen rationalen Charakter besitzende Funktion auch überhaupt rational ist) — von viel tieferliegender Bedeutung, als die Sätze lokalen Charakters, die sich auf das Verhalten der rationalen Funktionen in den Umgebungen einer einzelnen Stelle beziehen. In der Theorie von $\mathfrak{Z}$ kann man der Be-

das seinen Grund darin, daß die stetigen Funktionen 1. Art nicht aus den einzelnen $\mathfrak{R}_p$ herausführen, während bei den stetigen Funktionen 2. Art der allen gemeinsame Wertkörper K als Bindeglied zwischen den einzelnen $\mathfrak{R}_p$ auftritt [1]).

Es ist eine besondere Klasse von bezgl. φ stetigen Funktionen 2. Art in K, die für den Spezialfall der Bewertungen φ_p von $\mathfrak{R}$ in der angekündigten engen Beziehung zu den Sätzen integralen Charakters über $\mathfrak{R}$ steht, nämlich die den weiteren Bedingungen

$$\chi(0) = 0, \quad \chi(a) \neq 0 \qquad \text{für } a \neq 0 \tag{29}$$

$$\chi(a) \cdot \chi(b) = \chi(a) \cdot (b) \tag{30}$$

unterworfenen solchen Funktionen. Wir nennen diese Funktionen χ *Charaktere* [2]) von K bezgl. φ. Zu ihnen gehört speziell die Bewertung φ selbst; die Beziehung der speziellen Charaktere φ_p von $\mathfrak{R}$ zu dem integralen Charakter besitzenden 1. Fundamentalsatz bildete den Inhalt des ersten Teiles unserer Betrachtung. Die die Charaktere von K bezgl. φ festlegenden Axiome (28)—(30) gehen aus den Axiomen (13)—(15), die den speziellen Charakter φ festlegen, hervor, indem (14) als (30) beibehalten, (15) bezw. das damit äquivalente (15′) durch das allgemeinere (28) ersetzt und sinngemäß (13) zu (29) verallgemeinert wird. Den durch die identische Bewertung φ_0 gelieferten Charakter nennen wir den *identischen Charakter* und bezeichnen ihn im jetzigen Zusammenhang auch mit χ_0, also

$$\chi_0(0) = 0, \quad \chi_0(a) = 1 \qquad \text{für } a \neq 0 \text{ [3])}.$$

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, *alle Charaktere von $\mathfrak{R}$ bezüglich der nichtidentischen* [4]) *Bewertungen φ_p zu finden.* Dazu stützen wir uns auf die oben ange-

---

zeichnung *integral* neben dem hier gemeinten: *auf alle Stellen bezüglich* noch den weiteren Sinn beilegen: *auf den Cauchyschen Integralsatz und die Cauchyschen Integralformeln zurückgehend.* In der Tat sind alle Sätze integralen Charakters über $\mathfrak{Z}$ leicht zu gewinnende Folgerungen aus diesen Integralsätzen. In der Theorie von $\mathfrak{R}$ hat man bisher kein Analogon zn den *Cauchy*schen Integralsätzen und wird wohl auch schwerlich ein solches finden können. Nach den Ausführungen dieser Anmerkung sind aber die Sätze integralen Charakters über $\mathfrak{R}$, wie z. B. die beiden Fundamentalsätze sowie das in meinen früheren Arbeiten über quadratische Formen in $\mathfrak{R}$ auftretende Fundamentalprinzip (ds. Journ. Bd. 152, S. 130; (II.); S. 208, (II.); Bd. 153, S. 24, Satz 11; S. 30, Satz 16; S. 33, Satz 19) als Äquivalent der *Cauchy*schen Integralsätze in $\mathfrak{R}$ anzusehen.

[1]) Die Tatsache, daß dieses Bindeglied K mit dem speziellen $\mathfrak{R}_\infty$ übereinstimmt, ist im Rahmen unserer Überlegungen als ein merkwürdiger Zufall anzusehen. (Vergl. die Ausführungen auf S. 203 oben.)

[2]) Das geht insofern über die Terminologie der Gruppentheorie hinaus, als wir außer den dort gestellten Forderungen (29), (30) noch die Stetigkeitsforderung (28) stellen, (die sich übrigens vermöge (29), (30) auf die Forderung der Stetigkeit an den Stellen $a_0 = 0$ und $a_0 = 1$ reduziert). Ein Charakter χ von K bezgl. φ liefert also eine *bezgl. φ stetige* „Darstellung" der multiplikativen Gruppe des derivierten Körpers $\overline{K}$ durch reelle Zahlen.

[3]) Es sei darauf hingewiesen, daß χ_0 wegen der auch auf $a_0 = 0$ erstreckten Stetigkeitsforderung (28) nur dann Charakter bezgl. φ ist, wenn 0 keine Häufungsstelle der Werte von φ ist, was im Falle $\mathfrak{R}$ *nur für die identische Bewertung* zutrifft.

[4]) Die Charaktere bezgl. φ_0 interessieren uns hier nicht; für φ_0 wird bei jedem k die Stetigkeitsforderung (28) inhaltlos, und die Charaktere von K bezgl. φ_0 sind identisch mit den nur (29), (30) genügenden Funktionen χ, d. h. mit den reellen Charakteren der multiplikativen Gruppe von $K(= \overline{K})$ im Sinne der Gruppentheorie.

gebenen, eindeutigen multiplikativen Darstellungen (a), (b), (c) der Elemente $a \neq 0$ eines $\mathfrak{R}_p$. Es seien u_p, v_p, w_p die Werte eines Charakters χ_p von $\mathfrak{R}$ bezgl. der Bewertung φ_p für die den Exponenten $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p$ entsprechenden Basiselemente (w_∞ fällt weg). Diese Werte sind Zahlen aus K, die wegen (29) von 0 verschieden sind.

a) $p = \infty$.

$$\chi_\infty(e) = u_\infty, \quad \chi_\infty(-1) = v_\infty.$$

Nach (30) muß v_∞ eine 2-te Einheitswurzel sein, so daß wir

$$v_\infty = \chi_\infty(-1) = (-1)^{\beta'_\infty}, \quad (\beta'_\infty = 0 \text{ oder } 1)\,^1)$$

setzen können und dann nach (30)

$$(\mathrm{a}') \qquad \chi_\infty((-1)^{\beta_\infty}) = (-1)^{\beta'_\infty \beta_\infty}$$

haben.

Wir zeigen nun ferner, daß $u_\infty > 1$ ist. Da nämlich die Relation

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0 \quad \text{bezgl. } \varphi_\infty$$

gilt, folgt aus (28) das Bestehen der Relation

$$\lim_{n\to\infty} \chi_\infty(e^{-n}) = \chi_\infty(0) = 0 \qquad \text{bezgl. d. abs. Bew. v. } \mathsf{K}.$$

Nun ist nach (30)

$$\chi_\infty(e^{-n}) = (\chi_\infty(e))^{-n} = u_\infty^{-n},$$

und diese Folge kann nur dann bezgl. der absoluten Bewertung von K zu 0 streben, wenn $|u_\infty| > 1$ ist. Da ferner nach (30) $u_\infty = \chi_\infty(e) = (\chi_\infty(e^{\frac{1}{2}}))^2$ ist, muß sogar $u_\infty > 1$ sein. Wir können somit setzen:

$$u_\infty = \chi_\infty(e) = e^{s_\infty}, \quad (s_\infty > 0 \text{ reell}).$$

Wir zeigen weiter, daß für alle a_∞ aus $\mathfrak{R}_\infty$

$$(\mathrm{a}'') \qquad \chi_\infty(e^{a_\infty}) = e^{s_\infty a_\infty}$$

sein muß. Aus

$$\chi_\infty(e^{a_\infty}) = (\chi_\infty(e^{\frac{a_\infty}{2}}))^2$$

folgt zunächst, daß $\chi_\infty(e^{a_\infty})$ stets positiv ist. Daraus folgt nach (30) leicht, daß (a'') für alle a_∞ aus $\mathfrak{R}$ gelten muß. Da nun ferner die Funktion $\psi_\infty(a_\infty) = e^{a_\infty}$ stetig von der 1. Art bezgl. φ_∞ ist, muß die Funktion $\chi_\infty(\psi_\infty(a_\infty)) = \chi_\infty(e^{a_\infty})$ nach (28) stetig von der 2. Art bezgl. φ_∞ sein. Stellt man also jedes a_∞ aus $\mathfrak{R}_\infty$ als Grenzwert bezgl. φ_∞ einer Folge $a_\infty^{(n)}$ aus $\mathfrak{R}$ dar:

$$a_\infty = \lim_{n\to\infty} a_\infty^{(n)} \quad \text{bezgl. } \varphi_\infty,$$

so bestehen die Relationen:

$$\lim_{n\to\infty} \psi_\infty(a_\infty^{(n)}) = \psi_\infty(a_\infty) \qquad \text{bezgl. } \varphi_\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} \chi_\infty(\psi_\infty(a_\infty^{(n)})) = \chi_\infty(\psi_\infty(a_\infty)) \qquad \text{bezgl. d. abs. Bew. v. } \mathsf{K}.$$

---

[1]) Die Bezeichnung dieses und der weiteren, entsprechenden Exponenten, die vorläufig unsystematisch anmuten mag, ist mit Rücksicht auf die unten (S. 211) herzustellende Beziehung zum *Hilbert*schen Normenrestsymbol gewählt.

Daraus folgt die bezgl. der absoluten Bewertung von K zu verstehende Grenzrelation:

$$\chi_\infty(e^{a_\infty}) = \chi_\infty(\psi_\infty(a_\infty)) = \lim_{n\to\infty} \chi_\infty(\psi_\infty(a_\infty^{(n)})) = \lim_{n\to\infty} \chi_\infty(e^{a_\infty^{(n)}}) = \lim_{n\to\infty} e^{s_\infty a_\infty^{(n)}}.$$

Nimmt man schließlich hinzu, daß die Funktion $\bar{\chi}_\infty(a_\infty) = e^{s_\infty a_\infty}$ für $s_\infty > 0$ stetig von der 2. Art bezgl. φ_∞ ist, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} e^{s_\infty a_\infty^{(n)}} = \lim_{n\to\infty} \bar{\chi}(a_\infty^{(n)}) = \bar{\chi}_\infty(a_\infty) = e^{s_\infty a_\infty} \qquad \text{bezgl. d. abs. Bew. v. K,}$$

d. h. die Richtigkeit von (a'') für beliebige a_∞ aus $\mathfrak{R}_\infty$ [1]).

Durch nochmalige Anwendung von (30) folgt jetzt aus (a), (a'), (a''), daß

$$\text{(31 a)} \qquad \chi_\infty(a) = e^{s_\infty a_\infty(a)}(-1)^{\beta'_\infty \beta_\infty(a)} = (\varphi_\infty(a))^{s_\infty}(-1)^{\beta'_\infty \beta_\infty(a)}, \qquad (a \neq 0)$$

sein muß. Umgekehrt zeigt man leicht, daß (31 a) für jedes reelle $s_\infty > 0$ und $\beta'_\infty = 0$ oder 1 einen Charakter von $\mathfrak{R}$ bezgl. φ_∞ darstellt.

b) $p = 2$.

$$\chi_2(2) = u_2, \quad \chi_2(-1) = v_2, \quad \chi_2(1+2^2) = w_2.$$

Nach (30) muß v_2 eine 2-te Einheitswurzel sein, so daß wir

$$v_2 = \chi_2(-1) = (-1)^{\beta_2'}, \qquad (\beta_2' = 0 \text{ oder } 1)$$

setzen können und dann nach (30)

$$\text{(b')} \qquad \chi_2((-1)^{\beta_2}) = (-1)^{\beta_2'\beta_2}$$

haben.

Wir zeigen ferner, daß $w_2 = \pm 1$ sein muß. Da nämlich die Funktion $\psi_2(\gamma_2) = (1+2^2)^{\gamma_2}$ für ganze γ_2 aus $\mathfrak{R}_2$ stetig von der 1. Art bezgl. φ_2 ist, muß für diese γ_2 die Funktion $\chi_2(\psi_2(\gamma_2)) = \chi_2((1+2^2)^{\gamma_2})$ nach (28) stetig von der 1. Art bezgl. φ_2 sein. Da nun die Relation

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = 0 \quad \text{bezgl. } \varphi_2$$

gilt, folgen die Relationen

$$\lim_{n\to\infty} \psi_2(2^n) = \psi_2(0) = 1 \quad \text{bezgl. } \varphi_2,$$

$$\lim_{n\to\infty} \chi_2(\psi_2(2^n)) = \chi_2(1) = 1 \quad \text{bezgl. d. abs. Bew. v. K.}$$

Nun ist nach (30)

$$\chi_2(\psi_2(2^n)) = \chi_2((1+2^2)^{2^n}) = (\chi_2(1+2^2))^{2^n} = w_2^{2^n},$$

und diese Folge kann nur dann bezgl. der absoluten Bewertung von K zu 1 streben, wenn $w_2 = \pm 1$ ist. Wir können somit setzen:

$$w_2 = \chi_2(1+2^2) = (-1)^{a_2'}, \qquad (a_2' = 0 \text{ oder } 1).$$

---

[1]) Diese an sich bekannte Deduktion ist hier nur deshalb ausführlich wiedergegeben und insbesondere der rein methodische Unterschied zwischen der Bewertung φ_∞ von $\mathfrak{R}_\infty$ und der absoluten Bewertung von K überall hervorgehoben, um die völlige Analogie zu den entsprechenden Deduktionen unter b) und c) hervortreten zu lassen.

Wir zeigen weiter, daß für alle ganzen γ_2 aus $\mathfrak{R}_2$

$$\text{(b'')} \qquad \chi_2((1+2^2)^{\gamma_2}) = (-1)^{\alpha_2'\gamma_2}$$

sein muß. Nach (30) folgt nämlich unmittelbar, daß (b'') für alle ganzen γ_2 aus $\mathfrak{R}$ gelten muß. Stellt man also (was stets möglich) jedes ganze γ_2 aus $\mathfrak{R}_2$ als Grenzwert bezgl. φ_2 einer Folge $\gamma_2^{(n)}$ aus $\mathfrak{R}$ dar:

$$\gamma_2 = \lim_{n\to\infty} \gamma_2^{(n)} \qquad \text{bezgl. } \varphi_2,$$

so bestehen nach obigem die Relationen

$$\lim_{n\to\infty} \psi_2(\gamma_2^{(n)}) = \psi_2(\gamma_2) \qquad \text{bezgl. } \varphi_2,$$

$$\lim_{n\to\infty} \chi_2(\psi_2(\gamma_2^{(n)})) = \chi_2(\psi_2(\gamma_2)) \qquad \text{bezgl. d. abs. Bew. v. K.}$$

Daraus folgt die bezgl. der absoluten Bewertung von K zu verstehende Grenzrelation:

$$\chi_2((1+2^2)^{\gamma_2}) = \chi_2(\psi_2(\gamma_2)) = \lim_{n\to\infty} \chi_2(\psi_2(\gamma_2^{(n)})) = \lim_{n\to\infty} \chi_2((1+2^2)^{\gamma_2^{(n)}}) = \lim_{n\to\infty} (-1)^{\alpha_2'\gamma_2^{(n)}}.$$

Nimmt man schließlich hinzu, daß die Funktion $\bar{\chi}_2(\gamma_2) = (-1)^{\alpha_2'\gamma_2}$ stetig von der 2. Art bezgl. φ_2 ist, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{\alpha_2'\gamma_2^{(n)}} = \lim_{n\to\infty} \bar{\chi}_2(\gamma_2^{(n)}) = \bar{\chi}_2(\gamma_2) = (-1)^{\alpha_2'\gamma_2} \qquad \text{bezgl. d. abs. Bew. v. K,}$$

d. h. die Richtigkeit von (b'') für beliebige ganze γ_2 aus $\mathfrak{R}_2$.

Wir zeigen schließlich, daß $|u_2| < 1$ sein muß. Da nämlich

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = 0 \qquad \text{bezgl. } \varphi_2$$

gilt, folgt nach (28) die Relation

$$\lim_{n\to\infty} \chi_2(2^n) = \chi_2(0) = 0 \qquad \text{bezgl. d. abs. Bew. v. K.}$$

Nun ist nach (30)

$$\chi_2(2^n) = (\chi_2(2))^n = u_2^n,$$

und diese Folge kann nur dann bezgl. der absoluten Bewertung von K zu 0 streben, wenn $|u_2| < 1$ ist. Wir können somit setzen:

$$u_2 = \chi_2(2) = e^{-s_2 \lg 2}(-1)^{\gamma_2'}, \qquad (s_2 > 0 \text{ reell}, \ \gamma_2' = 0 \text{ oder } 1)$$

und haben dann nach (30) unmittelbar:

$$\text{(b''')} \qquad \chi_2(2^{\alpha_2}) = e^{-s_2\alpha_2 \lg 2}(-1)^{\gamma_2'\alpha_2}.$$

Durch nochmalige Anwendung von (30) folgt jetzt aus (b), (b'), (b''), (b'''), daß

$$\text{(31 b)} \qquad \chi_2(a) = e^{-s_2\alpha_2(a)\lg 2}(-1)^{\gamma_2'\alpha_2(a) + \beta_2'\beta_2(a) + \alpha_2'\gamma_2(a)}$$

$$= (\varphi_2(a))^{s_2}(-1)^{\gamma_2'\alpha_2(a) + \beta_2'\beta_2(a) + \alpha_2'\gamma_2(a)}, \qquad (a \neq 0)$$

sein muß. Umgekehrt zeigt man leicht, daß (31 b) für jedes reelle $s_2 > 0$ und $\alpha_2', \beta_2', \gamma_2' = 0$ oder 1 einen Charakter von $\mathfrak{R}$ bezgl. φ_2 darstellt.

c) $p = q$.

$$\chi_q(q) = u_q, \quad \chi_q(r_q) = v_q, \quad \chi_q(1+q) = w_q.$$

Nach (30) muß v_q eine $(q-1)$-te Einheitswurzel sein. Da aber K nur die 2-ten Einheitswurzeln enthält und $q-1$ gerade ist, muß v_q eine solche sein, und wir können setzen:

$$v_q = \chi_q(r_q) = (-1)^{\alpha_q'}, \qquad (\alpha_q' = 0 \text{ oder } 1),$$

so daß wir nach (30) haben:

$$(c') \qquad \chi_q(r_q^{\beta_q}) = (-1)^{\alpha_q'\beta_q}.$$

Die Überlegungen bezüglich w_q sind ganz dieselben wie die auf w_2 bezüglichen unter b), nur daß hier, weil q ungerade ist, aus

$$\lim_{n\to\infty} w_q^{q^n} = 0 \quad \text{bezgl. d. abs. Bew. v. } \mathsf{K}$$

sogar auf $w_q = 1$ geschlossen werden kann. Wir erhalten also hier:

$$(c'') \qquad \chi_q(w_q^{\gamma_q}) = 1.$$

Entsprechend wir unter b) folgt auch hier, daß $|u_q| < 1$ ist, so daß wir setzen können:

$$u_q = \chi_q(q) = e^{-s_q \lg q}(-1)^{\frac{q-1}{2}\alpha_q' + \beta_q'}, \qquad (s_q < 0 \text{ reell}, \ \beta_q' = 0 \text{ oder } 1).$$

Wir haben dann nach (30):

$$(c''') \qquad \chi_q(q^{\alpha_q}) = e^{-s_q\alpha_q \lg q}(-1)^{\frac{q-1}{2}\alpha_q'\alpha_q + \beta_q'\alpha_q}.$$

Nach (30) ergibt sich aus (c'), (c'), (c''), (c'''), daß

$$(31\,c) \qquad \chi_q(a) = e^{-s_q\alpha_q(a)\lg q}(-1)^{\frac{q-1}{2}\alpha_q'\alpha_q(a) + \beta_q'\alpha_q(a) + \alpha_q'\beta_q(a)}$$

$$= (\varphi(a))^{s_q}(-1)^{\frac{q-1}{2}\alpha_q'\alpha_q(a) + \beta_q'\alpha_q(a) + \alpha_q'\beta_q(a)}, \qquad (a \neq 0)$$

sein muß. Umgekehrt zeigt man leicht, daß (31 c) für jedes reelle $s_q > 0$ und α_q', $\beta_q' = 0$ oder 1 einen Charakter von $\mathfrak{K}$ bezgl. φ_q darstellt.

In (31 a—c) haben wir alle Charaktere von $\mathfrak{K}$ bezgl. der Bewertungen φ_p gefunden. Wir stellen zunächst fest, daß

$$(32) \qquad |\chi_p(a)| = (\varphi_p(a))^{s_p} = \Phi_p(a)$$

mit dem allgemeinsten System untereinander und zur identischen nicht-äquivalenten Bewertungen von $\mathfrak{K}$ übereinstimmt. Wir setzen

$$(33) \qquad \chi_p(a) = |\chi_p(a))| \cdot \chi_p^{(0)}(a)$$

und nennen die $\chi_p^{(0)}$ *reduzierte Charaktere.* Diese genügen neben den Bedingungen (28)—(30) für die χ, wobei aber jetzt in der Stetigkeitsforderung (28) die Stelle $a_0 = 0$ auszunehmen ist, noch der Zusatzbedingung

$$(29') \qquad |\chi^{(0)}(a)| = 1 \qquad \text{für } a \neq 0$$

und sind (jedenfalls für den Spezialfall $\mathfrak{K}$) auf die allgemeinsten diesen Be-

dingungen genügenden Funktionen [1]). Aus (31 a—c) entnehmen wir als vollständiges System der reduzierten Charaktere von $\mathfrak{R}$ bezgl. der φ_p:

$$\left.\begin{aligned}
&(31\,a^0) \qquad \chi_\infty^{(0)}(a) = (-1)^{\beta'_\infty \beta_\infty(a)} \\
&(31\,b^0) \qquad \chi_2^{(0)}(a) = (-1)^{\gamma_2'\alpha_2(a) + \beta_2'\beta_2(a) + \alpha_2'\gamma_2(a)} \\
&(31\,c^0) \qquad \chi_q^{(0)}(a) = (-1)^{\frac{q-1}{2}\alpha_q'\alpha_q(a) + \beta_q'\alpha_q(a) + \alpha_q'\beta_q(a)}
\end{aligned}\right\} \quad (a \neq 0),$$

wo die Parameter α'_p, β'_p, γ'_p irgendwelche Werte 0 oder 1 haben.

Wir stellen ferner die formale Analogie dieser reduzierten Charaktere zum *Hilbert*schen Normenrestsymbol fest. Ist nämlich $a' \neq 0$ irgendeine rationale Zahl, so gilt bekanntlich [2]) für $a \neq 0$ [3]):

$$(34\,a) \qquad \left(\frac{a, a'}{\infty}\right) = (-1)^{\beta_\infty(a')\beta_\infty(a)}$$

$$(34\,b) \qquad \left(\frac{a, a'}{2}\right) = (-1)^{\gamma_2(a')\alpha_2(a) + \beta_2(a')\beta_2(a) + \alpha_2(a')\gamma_2(a)}$$

$$(34\,c) \qquad \left(\frac{a, a'}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}\alpha_q(a')\alpha_q(a) + \beta_q(a')\alpha_q(a) + \alpha_q(a')\beta_q(a)}.$$

Bestimmt man also die Parameter α'_p, β'_p, γ'_p aus einem rationalen Parameter $a' \neq 0$ durch die Kongruenzen

$$(35) \qquad \alpha'_p \equiv \alpha_p(a'), \quad \beta'_p \equiv \beta_p(a'), \quad \gamma'_p \equiv \gamma_p(a') \mod 2$$

(γ'_∞ fällt weg), so gilt für die zugehörigen speziellen reduzierten Charaktere auf Grund des von *Hilbert* in die Form

$$(36) \qquad \prod_p \left(\frac{a, a'}{p}\right) = \chi_0(a)$$

gesetzten 2. Fundamentalsatzes das Produkttheorem

$$(37) \qquad \prod_p \chi_p^{(0)}(a) = \chi_0(a).$$

Wählt man ferner noch die Parameter s_p alle gleich einem reellen $s > 0$, so folgt aus (25), (32), (33), (37) auch für die zugehörigen allgemeinen χ_p das Produkttheorem:

$$(38) \qquad \prod_p \chi_p(a) = \chi_0(a).$$

Wir untersuchen nun wieder, ob die in (35) getroffene Wahl der Parameter α'_p, β'_p, γ'_p verbunden mit $s_p = s > 0$ für alle p die einzige ist, bei der das Produkttheorem (38) gilt, oder ob es ev. noch andere derartige Theoreme gibt. Es wird sich zeigen, daß letzteres der Fall ist, daß aber auch das allgemeinste Produkttheorem

---

[1]) Durch Weglassen der Stetigkeitsforderung (28) für $a_0 = 0$ tritt in der vorhergehenden Deduktion nur die Änderung ein, daß die s_p dann *beliebige reelle Zahlen*, speziell also auch 0, sein können. Ob auch für allgemeine K die $\chi^{(0)}$, d. h. die „Vorzeichen" der χ, die allgemeinsten den genannten Bedingungen genügenden Funktionen sind, steht dahin.

[2]) *Hensel* „Zahlentheorie", Berlin 1913, S. 328, (8).

[3]) Für $a = 0$ sei im folgenden $\left(\frac{a, a'}{p}\right) = 0$ gesetzt.

(38) nicht über den Inhalt des bisher gewonnenen Spezialfalles, nämlich über die beiden Fundamentalsätze der elementaren Zahlentheorie hinausgeht. Der einzige Unterschied, den das allgemeinste Produkttheorem (38) gegenüber dem bisherigen Spezialfall aufweist, ist der, daß in ihm der Parameter a' nicht auf die rationalen Zahlen $\neq 0$ (endliche Primzahlpotenzprodukte) beschränkt ist, sondern allgemeiner ein *unendliches Primzahlpotenzprodukt* sein kann.

Soll ein Charakterensystem χ_p von $\mathfrak{R}$ bezgl. der φ_p der Produktbedingung (38) genügen, so muß zunächst auch das System $|\chi_p|$ dieser Bedingung genügen. Aus (32) und unserem Resultat **(I.)** folgt also, daß die Parameter s_p alle einem reellen $s > 0$ gleich sein müssen, und dann nach (25), (33), daß für die zugehörigen reduzierten Charaktere $\chi_p^{(0)}$ das Produkttheorem (37) gelten muß.

Um daraus den weiteren angekündigten Schluß auf die Natur der $\chi_p^{(0)}$ ziehen zu können, müssen wir erst die dazu heranzuziehende Theorie der *Hilbert*schen Normenrestsymbole $\left(\frac{a, a'}{p}\right)$ mit in obigem Sinne unendlichen a', die bisher noch nirgends behandelt ist, entwickeln. Es sei

$$(39) \qquad a' = (-1)^{\beta_\infty(a')} 2^{\alpha_2(a')} q_1^{\alpha_{q_1}(a')} q_2^{\alpha_{q_2}(a')} \cdots \cdots \begin{pmatrix} \beta_\infty(a') \bmod 2, \\ \alpha_2(a'),\ \alpha_{q_\nu}(a') \\ \text{ganz-rational} \end{pmatrix}$$

ein nicht notwendig endliches Produkt aus Primzahlpotenzen und einem Einheitsfaktor. Dabei sei hier und im folgenden $q_1, q_2, \ldots$ die irgendwie fest geordnete Folge der positiven ungeraden Primzahlen aus $\mathfrak{R}$, und für die in den Exponenten auftretenden Funktionen von a' werde die hier gewählte Bezeichnungsweise in Verallgemeinerung der bisherigen ein- für allemal festgesetzt. Wir setzen dann für $n \geqq 0$:

$$(40) \qquad a_n' = (-1)^{\beta_\infty(a')} 2^{\alpha_2(a')} q_1^{\alpha_{q_1}(a')} \ldots q_n^{\alpha_{q_n}(a')}$$

und definieren für jedes p eine Funktionsfolge

$$(41) \qquad \eta_p^{(n)}(a) = \left(\frac{a, a_n'}{p}\right)$$

für Argumente a aus $\mathfrak{R}$ mit Werten aus K. Diese Funktionen sind sämtlich reduzierte Charaktere von $\mathfrak{R}$ bezgl. der entsprechenden φ_p, weil die a. S. 210 unten genannten Bedingungen für sie erfüllt sind. Wenn ferner für alle p und alle a aus $\mathfrak{R}$

$$(42) \qquad \lim_{n\to\infty} \eta_p^{(n)}(a) = \eta_p(a) \quad \text{bezgl. d. abs. Bew. von } \mathsf{K}$$

existiert (d. h. wenn die $\left(\frac{a, a_n'}{p}\right)$ bei jedem festen p und a für alle hinreichend hohen n ein- und denselben der Werte $+1, -1$ haben), so sind auch die Grenzfunktionen $\eta_p(a)$ ein System reduzierter Charaktere von $\mathfrak{R}$ bezgl. der φ_p. Wir schreiben dann

$$(43) \qquad \eta_p(a) = \left(\frac{a, a'}{p}\right).$$

Aus (39), (40) ergeben sich unmittelbar die Grenzrelationen

$$\lim_{n\to\infty} \beta_\infty(a_n') = \beta_\infty(a')$$
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_2(a_n') = \alpha_2(a')$$
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_q(a_n') = \alpha_q(a')$$

und daraus durch Einsetzen der speziellen $a = -1, 2$ bzw. q in die Grenzrelationen (42) für $p = 2$ bezw. q die Existenz der weiteren Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \beta_2(a_n') = \beta_2(a'), \qquad \lim_{n\to\infty} \gamma_2(a_n') = \gamma_2(a');$$
$$\lim_{n\to\infty} \beta_q(a_n') = \beta_q(a')$$

bezgl. der absoluten Bewertung von K. Mit der durch die letzteren Formeln eingeführten Verallgemeinerung der bisherigen Bedeutung dieser Funktionen von a' gelten dann die Formeln (34 a—c) auch für das durch (41)—(43) verallgemeinerte Normenrestsymbol. Um schließlich auch die Gültigkeit des Produkttheorems (36) für unser verallgemeinertes Normenrestsymbol einzusehen, zeigen wir zunächst, daß aus der vorausgesetzten Existenz der Grenzwerte (42) sogar auf die *Gleichmäßigkeit in p* dieser Grenzrelationen geschlossen werden kann, d. h. auf die Existenz eines $n_0(a)$ zu jedem festen a, so daß für alle $n \geqq n_0(a)$ und *alle* p gilt: $\eta_p^{(n)}(a) = \eta_p(a)$. Daß zu jedem a und festem p ein derartiges $n_0(a, p)$ existiert, ist mit der Existenz der Grenzwerte (42) gleichbedeutend. Daß diese $n_0(a, p)$ *von p unabhängig* gewählt werden können, braucht nach (30) (d. h. dem Zerlegungssatz für das *Hilbert*sche Normenrestsymbol, angewandt auf a) nur für die speziellen $a = -1, 2, q$ bewiesen zu werden, aus denen sich nach dem 1. Fundamentalsatz alle $a \neq 0$ aus $\mathfrak{R}$ multiplikativ zusammensetzen lassen. Nach dem auf die a_n' angewandten Zerlegungssatz für das *Hilbert*sche Normenrestsymbol genügt es ferner zu zeigen, daß für diese speziellen a die Zusatzfaktoren $\left(\frac{a, q_n^{\alpha_{q_n}(a')}}{p}\right)$, die gemäß (40) beim Übergang von $\eta_p^{(n-1)}(a) = \left(\frac{a, a_{n-1}'}{p}\right)$ zu $\eta_p^{(n)}(a) = \left(\frac{a, a_n'}{p}\right)$ auftreten, für *alle* p gleich 1 sind, wenn nur $n > n_0(a)$ gewählt wird.

Für $a = -1$ wählen wir nun $n_0(-1) \geqq n_0(-1, \infty), n_0(-1, 2)$, wo die letzteren Indizes die oben angegebene Bedeutung haben. Dann ist infolge dieser Wahl

$$\left(\frac{-1, q_n^{\alpha_{q_n}(a')}}{\infty}\right) = 1, \qquad \left(\frac{-1, q_n^{\alpha_{q_n}(a')}}{2}\right) = 1 \quad \text{für } n \geqq n_0(-1).$$

Ferner ist nach (34 c)

$$\left(\frac{-1, q_n^{\alpha_{q_n}(a')}}{q_\nu}\right) = 1 \qquad \text{für } \nu \neq n,$$

weil dann $\alpha_{q_\nu}(q_n^{\alpha_{q_n}(a')}) = 0$, $\alpha_{q_\nu}(-1) = 0$ ist. Nach (36) ist also auch das einzig noch übrige

$$\left(\frac{-1,\, q_n^{a_{q_n}(a')}}{q_n}\right) = 1 \quad \text{für } n \geqq n_0(-1),$$

womit die Behauptung für $a = -1$ bewiesen ist.

Für $a = 2$ bzw. q wählen wir $n_0(2) \geqq n_0(2, \infty)$, $n_0(2, 2)$ bzw. $n_0(q) \geqq n_0(q, \infty)$, $n_0(q, 2)$, $n_0(q, q)$. Dann führen ganz entsprechende Schlüsse, wie für $a = -1$, zum erstrebten Nachweis.

Vermöge der damit bewiesenen Gleichmäßigkeit in p der Grenzrelationen (42) folgt nun unmittelbar die Gültigkeit des Produkttheorems (36) für unser verallgemeinertes Normenrestsymbol. Denn unter Anwendung des bisherigen speziellen Produkttheorems (36) kann auf

$$\prod_p \left(\frac{a, a'}{p}\right) = \prod_p \eta_p(a) = \prod_p \eta_p^{(n)}(a) = \prod_p \left(\frac{a, a'_n}{p}\right) = \chi_0(a)$$

geschlossen werden, wenn man nur den hierbei vermittelnd eingeführten Index $n \geqq n_0(a)$ wählt, wo $n_0(a)$ dieselbe Bedeutung wie vorher hat [1]).

Es sei nun $\chi_p^{(0)}$ ein reduziertes Charakterensystem von $\mathfrak{R}$ bezgl. der φ_p, für das die Produktrelation (37) besteht. Wir zeigen dann die Existenz eines a' der Form (39), für das die Grenzwerte gemäß (41), (42), (43) vorhanden sind und die Werte

$$\chi_p^{(0)}(a) = \left(\frac{a, a'}{p}\right) \tag{44}$$

haben.

Dazu definieren wir a' auf Grund der Darstellungen (31 $a^0 - c^0$) der $\chi_p^{(0)}$ durch

$$a' = (-1)^{\beta'_\infty} 2^{\alpha'_2} q_1^{a'_{q_1}} q_2^{a'_{q_2}} \ldots,$$

und setzen ferner wieder für $n \geqq 0$:

$$a'_n = (-1)^{\beta'_\infty} 2^{\alpha'_2} q_1^{a'_{q_1}} \ldots q_n^{a'_{q_n}}.$$

Dann haben wir:

$$\beta'_\infty = \beta_\infty(a'_n) \quad \text{für jedes } n, \tag{45 a}$$

$$\alpha'_2 = \alpha_2(a'_n) \quad \text{für jedes } n, \tag{45 b}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} 0 = \alpha_{q_\nu}(a'_n) & \text{für } n < \nu \\ \alpha'_{q_\nu} = \alpha_{q_\nu}(a'_n) & \text{für } n \geqq \nu \end{array}\right\}. \tag{45 c}$$

(45 a) besagt vermöge (31 a^0), (34 a) unmittelbar, daß

---

[1]) Als Beispiel eines wirklich unendlichen a', für das $\left(\frac{a, a'}{p}\right)$ für alle rationalen a und alle p konvergiert, nennen wir $a' = r_1 r_2 \ldots\ldots$, wo die $r_1, r_2, \ldots.$ eine solche Folge positiver rationaler Primzahlen $\equiv 1 \bmod 2^3$ ist, daß die *Legendre*schen Symbole

$$\left(\frac{r_1}{q_1}\right) = 1; \quad \left(\frac{r_2}{q_1}\right) = 1, \quad \left(\frac{r_2}{q_2}\right) = 1; \quad \ldots.$$

(allgemein $\left(\frac{r_n}{q_\nu}\right) = 1$ für $\nu \leqq n$) sind. Die Möglichkeit einer solchen Wahl von $r_1, r_2, \ldots$ ergibt sich aus dem *Dirichlet*schen Primzahlsatz für arithmetische Reihen.

$$\chi_\infty^{(0)}(a) = \left(\frac{a, a_n'}{\infty}\right) \quad \text{für jedes } n \tag{46 a}$$

ist. Wir zeigen ferner, daß zu jedem a ein n_a existiert, so daß

$$(-1)^{\alpha' q \beta_q(a)} = \left(\frac{a, a_n'}{q}\right) \quad \text{für } n \geqq n_a \tag{47}$$

und zu q prime a (d. h. $\alpha_q(a) = 0$) gilt. Da nämlich nur endlich viele der $\alpha_{q_n}(a)$ von 0 verschieden sind, reduziert sich das nach unserer Voraussetzung konvergente unendliche Produkt $\prod_p \chi_p^{(0)}(a)$ gemäß (34 c⁰) bis auf einen endlichen Teil auf das unendliche Produkt $\prod_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\alpha' q_\nu \beta_{q_\nu}(a)}$. Letzteres muß also ebenfalls konvergieren, d. h. es muß ein n_a existieren, so daß $(-1)^{\alpha' q_\nu \beta' q_\nu(a)} = 1$ für $\nu > n_a$ ist. Wird nun $n \geqq n_a$ und $\alpha_{q_\nu}(a) \neq 0$ vorausgesetzt, so folgt aus (34 c) und (45 c), falls $\nu \leqq n$ ist:

$$(-1)^{\alpha' q_\nu \beta_{q_\nu}(a)} = (-1)^{\alpha_{q_\nu}(a' n) \beta_{q_\nu}(a)} = \left(\frac{a, a_n'}{q_\nu}\right),$$

und falls $\nu > n$, also auch $\nu > n_a$ ist:

$$(-1)^{\alpha' q_\nu \beta_{q_\nu}(a)} = 1 = (-1)^{\alpha_{q_\nu}(a' n) \beta_{q_\nu}(a)} = \left(\frac{a, a_n'}{q_\nu}\right),$$

und somit auf alle Fälle die Gültigkeit von (47).

Wir setzen nun zur Bestimmung der durch (45 a—c) noch nicht festgelegten Parameter β_2', γ_2', β_q' in die vorausgesetzte Produktrelation (37) die speziellen $a = -1, 2, q$ ein.

Für $a = -1$ haben wir wegen (46 a) und $\alpha_2(-1) = 0$, $\beta_2(-1) = 1$, $\gamma_2(-1) = 0$, $\alpha_q(-1) = 0$:

$$1 = \prod_p \chi_p^{(0)}(-1) = \left(\frac{-1, a_n'}{\infty}\right) (-1)^{\beta_2'} \prod_p (-1)^{\alpha' q \beta' q(-1)},$$

oder nach (47):

$$1 = (-1)^{\beta_2'} \prod_{p \neq 2} \left(\frac{-1, a_n'}{p}\right) \quad \text{für } n \geqq n_{-1}.$$

Nach (36) folgt also:

$$(-1)^{\beta_2'} = \left(\frac{-1, a_n'}{2}\right) \quad \text{für } n \geqq n_{-1},$$

d. h. nach (34 b):

$$\beta_2' \equiv \beta_2(a_n') \bmod 2 \quad \text{für } n \geqq n_{-1}. \tag{46 b'}$$

Für $a = 2$ haben wir wegen (46 a) und $\alpha_2(2) = 1$, $\beta_2(2) = 0$, $\gamma_2(2) = 0$, $\alpha_q(2) = 0$:

$$1 = \prod_p \chi_p^{(0)}(2) = \left(\frac{2, a_n'}{\infty}\right) (-1)^{\gamma_2'} \prod_q (-1)^{\alpha' q \beta' q(2)},$$

oder nach (47):

$$1 = (-1)^{\gamma_2'} \prod_{p \neq 2} \left(\frac{2, a_n'}{p}\right) \quad \text{für } n \geqq n_2.$$

Nach (36) folgt also:

$$(-1)^{\gamma_2'} = \left(\frac{2, a_n'}{2}\right) \quad \text{für } n \geqq n_2,$$

d. h. nach (34 b):

$$(46\,b'') \qquad \gamma_2' \equiv \gamma_2(a_n') \quad \text{für } n \geqq n_2.$$

Aus (45 b), (46 b'), (46 b'') folgt gemäß (31 b^0), (34 b):

$$(46\,b) \qquad \chi_2^{(0)}(a) = \left(\frac{a, a_n'}{2}\right) \quad \text{für } n \geqq n_{-1}, n_2.$$

Für $a = q$ haben wir wegen (46 a), (46 b) und $\alpha_q(q) = 1$, $\beta_q(q) = 0$, $\alpha_q(q') = 0$ für $q' \neq q$:

$$1 = \prod_p \chi_p^{(0)}(q) = \left(\frac{q, a_n'}{\infty}\right)\left(\frac{q, a_n'}{2}\right)(-1)^{\frac{q-1}{2}\alpha'_q + \beta'_q} \prod_{q' \neq q} (-1)^{\alpha'_{q'}\beta_{q'}(q)}$$

für $n \geqq n_{-1}, n_2,$

oder nach (47):

$$1 = (-1)^{\frac{q-1}{2}\alpha'_q + \beta'_q} \prod_{p \neq q} \left(\frac{q, a_n'}{p}\right) \quad \text{für } n \geqq n_{-1}, n_2, n_q.$$

Nach (36) folgt also:

$$(-1)^{\frac{q-1}{2}\alpha'_q + \beta'_q} = \left(\frac{q, a_n'}{q}\right) \quad \text{für } n \geqq n_{-1}, n_2, n_q.$$

Wird nun noch $\alpha_q'(a_n') = \alpha_q'$ vorausgesetzt, was für hinreichend hohe n nach (45 c) sicher zutrifft, so folgt nach (34 c):

$$\frac{q-1}{2}\alpha_q' + \beta_q' \equiv \frac{q-1}{2}\alpha_q'(a_n') + \beta_q(a_n') \bmod 2,$$

d. h.

$$(46\,c') \qquad \beta_q' \equiv \beta_q(a_n') \bmod 2 \quad \text{für hinreichend hohe } n.$$

Aus (45 c), (46 c') folgt gemäß (31 c^0), (34 c):

$$(46\,c) \qquad \chi_q^{(0)}(a) = \left(\frac{a, a_n'}{q}\right) \quad \text{für hinreichend hohe } n.$$

(46 a—c) besagen die Konvergenz von $\left(\frac{a, a'}{p}\right)$ für alle a und p gegen $\chi_p^{(0)}(a)$, d. h. die Behauptung (44).

Wir fassen das Ergebnis unserer nunmehr auch den 2. Fundamentalsatz rückschauend einbeziehenden Betrachtungen in die folgende Fortsetzung des Theorems **(I.)** zusammen:

(II.) *Das Charakterensystem des rationalen Zahlkörpers bezgl. dessen sämtlicher, untereinander und zur identischen nicht-äquivalenten Bewertungen φ_p wird durch*

$$(31) \qquad \chi_p(0) = 0, \quad \left\{\begin{array}{l} \chi_\infty(a) = \varphi_\infty^{s_\infty}(a)(-1)^{\beta'_\infty \beta_\infty(a)} \\ \chi_2(a) = \varphi_2^{s_2}(a)(-1)^{\gamma_2'\alpha_2(a) + \beta_2'\beta_2(a) + \alpha_2'\gamma_2(a)} \\ \chi_q(a) = \varphi_q^{s_q}(a)(-1)^{\frac{q-1}{2}\alpha'_q\alpha_q(a) + \beta'_q\alpha_q(a) + \alpha'_q\beta_q(a)} \end{array}\right\} \quad \text{für } a \neq 0$$

gegeben, wenn die verfügbaren Parameter s_p *und* α'_p, β'_p, γ'_p (α'_∞, γ'_∞ *fallen fort*) *irgendwie den Bedingungen*

$$s_p \text{ reell} > 0, \quad \alpha'_p, \beta'_p, \gamma'_p = 0 \text{ oder } 1$$

gemäß gewählt werden. Wählt man speziell die s_p *alle gleich einem reellen* $s > 0$ *und bestimmt die* α'_p, β'_p, γ'_p *durch*

$$(35) \qquad \alpha'_p \equiv \alpha_p(a'), \quad \beta'_p \equiv \beta_p(a'), \quad \gamma'_p \equiv \gamma_p(a') \bmod 2 \text{ für } a \neq 0,$$

wo der Parameter a' *irgendein derartiges nicht notwendig endliches Produkt von rationalen Primzahlpotenzen und einem Einheitsfaktor ist, daß das verallgemeinerte Normenrestsymbol* $\left(\frac{a, a'}{p}\right)$ *für jedes rationale* a *und jedes* p *konvergiert, so wird*

$$\chi_p(a) = \varphi_p^s(a) \left(\frac{a, a'}{p}\right),$$

und es gilt das Produkttheorem

$$(38) \qquad \prod_p \chi_p(a) = \chi_0(a),$$

das vermöge der Aufspaltung

$$(33) \qquad \chi_p(a) = |\chi_p(a)|\, \chi_p^{(0)}(a),$$

wobei

$$|\chi_p(a)| = \varphi_p^s(a), \qquad \chi_p^{(0)}(a) = \left(\frac{a, a'}{p}\right),$$

in die beiden mit dem 1. bezw. 2. Fundamentalsatz äquivalenten Produkttheoreme

$$(26) \qquad \prod_p |\chi_p(a)| = \chi_0(a), \qquad (37) \qquad \prod_p \chi_p^{(0)}(a) = \chi_0(a)$$

zerfällt.

Umgekehrt müssen, damit das Produkttheorem (38) *gilt, die Parameter* s_p *und* α'_p, β'_p, γ'_p *wie angegeben gewählt werden.*

Der in unseren Theoremen **(I.)** und **(II.)** ausgesprochene Sachverhalt zeigt, daß sich die *Ideenkreise um die beiden Fundamentalsätze* der elementaren Zahlentheorie vollständig in der Aufgabe erschöpfen, *alle Bewertungen und dann alle Charaktere bezgl. dieser Bewertungen des rationalen Zahlkörpers zu bestimmen.* Hierdurch wird die im Titel dieser Arbeit vollzogene *Synthese der beiden zunächst wesensfremd zueinander erscheinenden Fundamentalsätze* gerechtfertigt. Der Gehalt beider Sätze läßt sich in ein- und dieselbe Form setzen, nämlich als *Produkttheorem* für je ein spezielles Charakterensystem $\varphi_p(a)$ bezw. $\left(\frac{a, a'}{p}\right)$ des rationalen Zahlkörpers ausdrücken. Die *Einzigkeit der beiden Fundamentalsätze* ist ferner in dem Sinne zu verstehen, daß sich das allgemeinste solche Produkttheorem für ein Charakterensystem χ_p des rationalen Zahlkörpers als *Folge* der beiden genannten speziellen, den beiden Fundamentalsätzen entsprechenden Produkttheoreme in der Form

$$\prod_p \varphi_p^s(a) \left(\frac{a, a'}{p}\right) = 1$$

darstellen läßt.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen es ferner als ganz naturgemäß erscheinen, daß die *reelle Analysis* bei einer Reihe von Untersuchungen über die Zahlen des rationalen Körpers $\mathfrak{R}$ hereinspielt, nämlich einerseits bei *lokalen Untersuchungen an der Stelle* $p = \infty$ *von* $\mathfrak{R}$ (also über die *Größe* der rationalen Zahlen) als Analysis des zugehörigen derivierten Körpers $\mathfrak{R}_\infty$ (analog wie die Analysis in einem $\mathfrak{R}_p$ mit $p \neq \infty$ (also die Theorie der Kongruenzen mod. p^n) bei lokalen Untersuchungen an der Stelle p von $\mathfrak{R}$ (also über die Teilbarkeit der rationalen Zahlen durch p) hereinspielt), andererseits aber auch — und das ist der bei weitem interessantere Fall — bei *Untersuchungen integralen Charakters über* $\mathfrak{R}$ als Analysis des gemeinsamen Wertkörpers K aller Bewertungen von $\mathfrak{R}$ (vgl. d. Ausf. a. S. 203 oben). In die letztgenannte Kategorie gehören z. B. die *Untersuchungen über die Verteilung der Primzahlen von* $\mathfrak{R}$. Die hierbei wichtigen analytischen Funktionen, soweit sie im reellen Körper K liegen, also die ζ-Funktion und die reellen L-Reihen von $\mathfrak{R}$, lassen sich übrigens mittels der in dieser Arbeit behandelten Bewertungen und Charaktere von $\mathfrak{R}$ so darstellen:

$$\zeta(s) = \prod_{p \neq \infty} \frac{1}{1 - \Phi_p(p)}$$

$$L(s, \chi) = \prod_{(q, a') = 1} \frac{1}{1 - \chi_q(q)},$$

wobei Φ_p bzw. χ_p das allgemeinste Bewertungs- bzw. Charakterensystem ist, das dem Produkttheorem $\prod_p \Phi_p = \varphi_0$ bzw. $\prod_p \chi_p = \chi_0$ genügt, ferner a' den in χ_p steckenden Parameter und die reelle Variable s den in den Φ_p bzw. χ_p gemeinsam auftretenden Parameter bedeutet. Auf Grund des Produkttheorems und des 1. Fundamentalsatzes folgen die für die Theorie der Primzahlverteilung grundlegenden Umformungen dieser als unendliche Produkte dargestellten Funktionen in unendliche Summen. Einerseits ist nämlich für $p \neq \infty$:

$$\Phi_p(p^\alpha) = \prod_{p' \neq p} \Phi_{p'}^{-1}(p^\alpha) = \Phi_\infty^{-1}(p^\alpha),$$

also

$$\zeta(s) = \prod_{p \neq \infty} \frac{1}{1 - \Phi_p(p)} = \prod_{p \neq \infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \Phi_p(p^\alpha) = \prod_{p \neq \infty} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \Phi_\infty^{-1}(p^\alpha)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_\infty^{-1}(n) \left(= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right).$$

Andererseits ist für $(q, a') = 1$

$$\chi_q(q^\alpha) = \Phi_q(q^\alpha) \left(\frac{q^\alpha, a'}{q} \right) = \prod_{p' \neq q} \Phi_{p'}^{-1}(q^\alpha) \prod_{p' \neq q} \left(\frac{q^\alpha, a'}{p'} \right)$$

$$= \Phi_\infty^{-1}(q^\alpha) \left(\frac{q^\alpha, a'}{2} \right) \prod_{q' \mid a'} \left(\frac{q^\alpha, a'}{q'} \right).$$

Setzen wir also

$$\chi(a) = \left(\frac{a, a'}{2} \right) \prod_{q' \mid a'} \left(\frac{a, a'}{q'} \right),$$

so daß χ eine der Bedingungen (29), (29′), (30) (aber nicht (28)) unterworfene Funktion (also ein reeller Charakter von $\mathfrak{R}$ vom Betrage 1 im Sinne der Gruppentheorie) ist, so folgt:

$$L(s,\chi) = \prod_{(q,a')=1} \frac{1}{1-\chi_q(q)} = \prod_{(q,a')=1} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \chi_q(q^\alpha) = \prod_{(q,a')=1} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \Phi_\infty^{-1}(q^\alpha)\chi(q^\alpha)$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ (n,2a')=1}}^{\infty} \Phi_\infty^{-1}(n)\chi(n)\left(= \sum_{\substack{n=1 \\ (n,2a')=1}}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}\right).$$

Außer den in der bisherigen Literatur untersuchten L-Reihen mit Charakteren χ, die einem *endlichen* a' entsprechen, ergibt sich so die Existenz weiterer, den in obigem Sinne *unendlichen* a' entsprechenden L-Reihen, deren Untersuchung, insbesondere auf eine Funktionalgleichung, von Interesse sein dürfte [1]).

Natürlich sind die in dieser Arbeit durchgeführten *rückschauenden* Betrachtungen, so wie sie vorliegen, in keiner Weise geeignet, den *Aufbau* der elementaren Zahlentheorie zu vollziehen, sondern höchstens, neuartige Gesichtspunkte für diesen Zweck zu liefern. Meine Betrachtungen scheinen mir jedoch neben dem Interesse, das sie um ihrer selbst willen beanspruchen, von Bedeutung zu sein für eine event. *Axiomatisierung* der elementaren Zahlentheorie, insbesondere des Tatsachenkomplexes um die beiden Fundamentalsätze, in demselben Sinne, wie sie von Frl. *E. Noether* für den *1. Fundamentalsatz der Idealtheorie* und den Begriff *ganze algebraische Zahl* gegeben worden ist [2]).

Was schließlich die Übertragung meiner Betrachtungen auf einen algebraischen Zahlkörper K von endlichem Grade an Stelle des rationalen Körpers $\mathfrak{R}$ betrifft, so ist diese leicht möglich. Die dazu heranzuziehenden Methoden sind von Herrn *Hecke* in den beiden Arbeiten über Zetafunktionen mit Größencharakteren[3]), die mich übrigens zu der vorliegenden Untersuchung angeregt haben, entwickelt worden. Man bezieht aber dabei als 2. Fundamentalsatz nur das spezielle *quadratische Reziprozitätsgesetz* in K ein, solange man an der bisherigen Forderung festhält, daß K ein Wertkörper (S. 201 oben) sei, also aus reellen Zahlen bestehe. Um auch das *allgemeinste Reziprozitätsgesetz* in K einzubeziehen, hätte man an Stelle des reellen Zahlkörpers K den zugehörigen algebraisch-abgeschlossenen *Körper* K' *aller komplexen Zahlen* für die Werte der Bewertungen und Charaktere zugrunde zu legen. Die Aufstellung aller Bewertungen [4]) und Charaktere ist dann leicht möglich, ebenso die Angabe des allgemeinsten Produkttheorems für die Bewer-

---

[1]) Man überzeugt sich leicht, daß der im Text auftretende quadratische Restcharakter $\chi(a)$ für „unendliches" a' nicht mit einem solchen nach einem „endlichen" Modul identisch ist, daß also die $L(s,\chi)$ für „unendliches" a' wirklich neuartige Funktionen sind (vergl. etwa das Beispiel von S. 214, Anm. 1).

[2]) Vortrag auf der Innsbrucker Tagung der D. M. V., 1924.

[3]) Math. Zeitschr. Bd. 1 (1918) und Bd. 6 (1920).

[4]) Diese beherrscht man auf Grund der Resultate der Herren *Kürschák* (S. 200, Anm. 2) *Ostrowski* (S. 203, Anm. 1; vergl. auch dessen Arbeit in ds. Journ. Bd. 147 (1916)) und *Rychlik* (ds. Journ. Bd. 153 (1923)).

tungen, das wieder mit dem 1. Fundamentalsatz in K äquivalent ist. Die Aufstellung des allgemeinsten Produkttheorems für die Charaktere läuft aber auf das bisher noch nicht bekannte *allgemeinste Reziprozitätsgesetz für Potenzreste mit beliebigen* (*zusammengesetzten*) *Exponenten* in K und dessen Darstellung als Produkttheorem hinaus. Zur analogen Durchführung unserer *rückschauenden* Betrachtungen in K wäre also zunächst die vollständige Durchführung des *Aufbaus* der Zahlentheorie in K, insbesondere des 2. Fundamentalsatzes, erforderlich.

Über Koordinatensysteme im unendlich fernen und im imaginären Teil der *Bolyai-Lobatschefski*schen Ebene.

Von *E. Roeser* in Bottrop.

Einleitung.

Bekanntlich kann man die sphärische Geometrie aus der Tatsache herleiten, daß jeder Kreis zugleich Abstandslinie ist. [Vgl. *Liebmann*, nichteuklidische Geometrie, Sammlung Schubert, § 29].

Der Bogen eines Kreises ist proportional dem Zentriwinkel und einer Funktion des Radius. Bezeichnet man diese Funktion mit $U(r)$, die entsprechende der Abstandslinie mit $U'(r)$, so gilt auf der Kugel:

$$s = \varphi \cdot U(r) = \varphi \cdot U'\left(\frac{\pi}{2} - r\right).$$

Und es ergibt sich die Funktionalgleichung:

$$U'(b - a) + U(b + a) = 2\,U'(a)U'(b),$$

wo a und b die Radien zweier Kreise sind. Die Gleichung hat 3 Lösungen:

$$U'(a) = 1, \qquad U'(a) = \operatorname{ch}\frac{a}{\varkappa}, \qquad U'(a) = \cos\frac{a}{\varkappa}.$$

Von diesen, so heißt es bei *Liebmann*, ist nur die dritte brauchbar, sie gibt die sphärische Trigonometrie.

Nun folgen aber aus den beiden ersten Lösungen die andern Geometrien, also muß sich auch in der hyperbolischen Ebene der Kreis als Abstandslinie auffassen lassen. Das läßt sich nun in der Tat leicht zeigen.

I.
Kreis und Abstandslinien.

Als Koordinaten eines Punktes seien die Abschnitte gewählt, die die auf die Achsen gefällten Lote bilden. Die Mittelpunktsform der Kreisgleichung ist dann:

$$\operatorname{th}^2\xi + \operatorname{th}^2\eta = \operatorname{th}^2\varrho \quad \text{oder kürzer:}$$

(1) $$x^2 + y^2 = r^2.$$

Der Abstand eines Punktes von der η Achse ist gegeben durch $\operatorname{th}\varrho = \operatorname{ch}\eta\,\operatorname{th}\xi$ oder:

$$r = \frac{x}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Daher stellt die Gleichung:

(2) $$x^2 + r^2y^2 = r^2$$

die beiden Abstandslinien zur η Achse dar, die den obigen Kreis in $\xi = \pm \varrho$ berühren. Verlegt man den Anfangspunkt nach $\xi = -\varrho$, so erhalten die Gleichungen **(1)** und **(2)** die Form:

(3) $$x^2(1 + r^2) - 2rx + y^2 = 0,$$

(4) $$x^2(1 + r^2) - 2rx + r^2y^2 = 0.$$

Von diesen Gleichungen soll ausgegangen werden. Man verschiebe den Anfangspunkt wieder nach rechts um die Strecke a [th $a = a$] durch die Transformation:

$$x = \frac{x' + a}{1 + ax'}; \quad y = \frac{y'\sqrt{1 - a^2}}{1 + ax'}, \quad \text{so wird } \textbf{(3)}:$$

$$x^2(1 + r^2 - 2ar) + 2x[a(1 + r^2) - r(1 + a^2)] + y^2(1 - a^2) + a[a(1 + r^2) - 2r] = 0.$$

Für $a = r$ ergibt sich natürlich wieder die Mittelpunktsform. Für $a = 1$ [unendlich ferner Anfangspunkt, $a = \infty$] die Gleichung:

$$(x + 1)^2 = 0.$$

Das bedeutet, daß die ganze Kurve von hier aus gesehen unendlich fern liegt. Und endlich zu einem im imaginären Teil der Ebene liegenden Anfangspunkt.

$$\text{th } a = \frac{1}{r} \left[a \text{ ist imaginär weil } \frac{1}{a} > 1\right]:$$

$$x^2(r^2 - 1) + y^2\frac{(r^2 - 1)}{r^2} + \frac{1 - r^2}{r^2} = 0 \quad \text{oder:}$$

(5) $$x^2 + y^2r'^2 = r'^2, \quad \text{wobei } r' = \frac{1}{r},$$

d. h. die Gleichung des Kreises erscheint in der Form der Gleichung der Abstandslinien mit imaginärem Abstand.

Die Tangensfunktionen von Abstand und Radius sind zueinander reziprok in bezug auf den Grenzkreis mit dem Radius $\varrho = \infty$, th $\varrho = 1$.

Ganz entsprechend nimmt die Abstandslinie auf denselben Anfangspunkt bezogen die Gleichung eines Kreises mit imaginärem Radius an, wie sofort ersichtlich ist, da sich **(4)** und **(3)** nur durch den Faktor r^2 von y^2 unterscheiden. Also fällt in **(5)** der Faktor von y^2 fort und man erhält:

(6) $$x^2 + y^2 = r'^2 = \frac{1}{r^2}.$$

Nachdem man soviel über den neuen Mittelpunkt und Radius weiß, kann man auch sofort von der Mittelpunktsform ausgehen: Gleichung 1 wird nach Verlegung von 0 um a:

$$x^2(1 - a^2r^2) + 2ax(1 - r^2) + y^2(1 - a^2) = r^2 - a^2.$$

Für $a = 1$ ist wieder:

$$(x + 1)^2 = 0.$$

Für $a = \frac{1}{a'}$:

$$x^2(a'^2 - r^2) + 2a'x(1 - r^2) + y^2(a'^2 - 1) = a'^2 - 1.$$

Nun hat im anfänglichen System der Mittelpunkt des Kreises von 0 den Abstand 0, die reziproke Strecke muß daher durch th $a = \infty$ bestimmt sein, daher $a' = 0$, also:

$$x^2 + y^2 \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Ganz analog geht die Abstandslinie wieder in den Kreis über.

Der Grenzkreis mit im Endlichen liegenden Mittelpunkt bildet den Grenzfall zwischen Kreis und Abstandslinie, seine Gleichung folgt aus (1) oder (2), indem man $r = 1$ setzt. Sie ist gegen jede Verschiebung des Anfangspunktes invariant, denn:

$$x^2 + y^2 = 1$$

wird durch Verlegung von 0 um a zu:

$$x^2(1 - a^2) + y^2(1 - a^2) = 1 - a^2$$
$$x^2 + y^2 = 1.$$

Es ergibt sich also das Resultat: Jeder Kreis kann betrachtet werden als Abstandslinie von einer imaginären Geraden, die inbezug auf den Grenzkreis Polare ist zum Kreismittelpunkt. Dreht man das ursprüngliche Koordinatensystem um den Mittelpunkt des Kreises, so dreht sich die imaginäre Gerade mit, denn die Verlegung des Anfangspunktes geschieht auf der ξ-Achse, das Umgekehrte gilt für die reelle Abstandslinie.

II.
Abstandslinie und Ellipse.

Die Abstandslinie zur ξ-Achse in der Entfernung $\pm \beta$ hat die Gleichung:

$$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

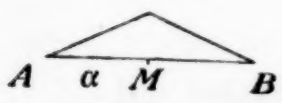
Bei Verschiebungen in Richtung der ξ-Achse ist sie natürlich invariant. Dieselbe Gleichung ergibt sich, wenn man in der Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Achse a unendlich werden läßt, also $a = 1$. Trotzdem sind die beiden Kurven nicht identisch, wie eine Verlegung des Anfangspunktes ins Unendliche zeigt.

$$\frac{x^2}{a^2}(1 + a^2) + \frac{2x}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{oder für} \quad a = 1:$$

$$2x^2 + 2x + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Eine solche Ellipse soll nochmal auf andere Weise erzeugt werden.

Man denke sich zwei Strahlenbüschel mit den Zentren A und B und dem Abstand $2a$. Man bestimme dann den geometrischen Ort des Schnittpunktes je zweier zu einander senkrechten Strahlen, es ist eine Ellipse.



Ein beliebiges Paar habe auf M bezogen die Gleichungen:

$$x + y \operatorname{tg} \varphi - a = 0,$$
$$x + y \operatorname{tg} \varphi_1 + a = 0. \quad \text{Außerdem ist:}$$
$$\cos(\varphi - \varphi_1) = cc_1 = -a^2 \cos\varphi \cos\varphi_1.$$

φ_1 und φ eliminiert, gibt als geometrischen Ort:

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 \frac{1 + a^2}{a^2} = 1.$$

Läßt man A und B ins Unendliche rücken, so folgt die Form:

$$x^2 + 2y^2 = 1. \quad \text{Hier ist } \operatorname{th} \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Läßt man den Anfangspunkt mit ins Unendliche rücken, indem man ihn zuerst nach B verlegt, so folgt:

$$x^2(1 - a^4) + 2ax(1 - a^2) + y^2(1 - a^4) = 0,$$
$$x^2(1 + a^2) + 2ax + y^2(1 + a^2) = 0.$$

Für $a = 1$:

$$x^2 + y^2 + x = 0 \quad \text{oder in Polarkoordinaten:}$$
$$r = -\cos\varphi.$$

Oder mit Umkehrung der Achsenrichtung:

$$\operatorname{th}\varrho = \cos\varphi.$$

Das ist aber die Beziehung, die zwischen Lot und Parallelwinkel besteht.

Man kann diesen Teil der Kurve sich auch im Endlichen liegend vorstellen.

Zieht man von 0 aus Strahlen ϱ unter dem Winkel φ und macht $\operatorname{th}\varrho = \cos\varphi$, so entsteht dieselbe Kurve, mit dem Scheitel im Endlichen. In der Tat, die Gleichung kann ja geschrieben werden:

$$x^2 + y^2 - x = 0.$$

Transformiert durch Verschiebung um a:

$$(x + a)^2 + y^2(1 - a^2) - (1 + ax)(x + a) = 0$$
$$x^2 - x(1 - a) + y^2(1 + a) - a = 0$$
$$a = 1$$
$$x^2 + 2y^2 = 1.$$

Also wieder die unendliche Ellipse, die in dieser Form mit der Abstandslinie übereinstimmt.

Das Fundamentalsystem für die Logarithmen eines $\mathfrak{p}$-adischen algebraischen Körpers und sein Regulator.

Von *A. Disse* in Bremen.

In einer früheren Arbeit, die in Band 154, S. 178—198 dieser Zeitschrift veröffentlicht ist, habe ich die Beziehungen zwischen Logarithmus und Numerus in einem $\mathfrak{p}$-adischen algebraischen Körper untersucht. Es hat sich ergeben, daß die logarithmischen Reihen innerhalb des Körpers $K(\mathfrak{p})$ einen Modul bilden[1]). Seine Elemente lassen sich nun durch ein Fundamentalsystem von $\lambda = e \cdot f$ Logarithmen in der Form

$$l = c_1 l_1 + c_2 l_2 + \cdots + c_\lambda l_\lambda \qquad (\mathfrak{p}) \tag{1}$$

mit ganzen p-adischen Koeffizienten

$$c_i = c_{i0} + c_{i1} p + c_{i2} p^2 + \cdots \qquad (p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

darstellen, wo λ den Grad von $K(\mathfrak{p})$, e die Ordnung und f den Grad des Primteilers $\mathfrak{p}$ innerhalb $K(\mathfrak{p})$ bezeichnet. Während Herr *Hensel*[2]) die Existenz eines Fundamentalsystems allgemein bewiesen und ein Verfahren angegeben hat, um durch eine endliche Anzahl von Reduktionen zu einem solchen zu gelangen, lassen sich mit den Hilfsmitteln jener Arbeit die Anfangsglieder der Fundamentallogarithmen unmittelbar hinschreiben; daraus kann die Ordnungszahl des „*Regulators*“

$$R(l_1 l_2 \cdots l_\lambda) = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & \ldots & l_\lambda \\ l_1' & l_2' & \ldots & l_\lambda' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ l_1^{(\lambda-1)} & l_2^{(\lambda-1)} & \ldots & l_\lambda^{(\lambda-1)} \end{vmatrix} \tag{2}$$

berechnet werden, die einen möglichst niedrigen Wert besitzt und daher beim Übergang zu einem anderen Fundamentalsystem sich nicht ändert, also eine wichtige Invariante für den betreffenden Körper bildet.

§ 1. Bestimmung der Fundamentallogarithmen.

Ich betrachte gleich den allgemeinen Fall, daß in $K(\mathfrak{p})$ die p^{ν_ε}-ten Einheitswurzeln als höchste irreguläre Einheitswurzeln existieren, wo $\nu_\varepsilon = 0, 1, \ldots, \nu_0$ sein kann. Ist $\nu_\varepsilon > 0$, so enthält $K(\mathfrak{p})$ sowohl *reguläre* logarithmische Reihen,

[1]) a. a. O. S. 188.

[2]) H. I, § 3, S. 101 (vergl. Band 154, S. 178, Anm. 1).

deren Ordnung $\varrho_k = p^x k - \varkappa e$ ist [1]), als auch *irreguläre* logarithmische Reihen, für die $\varrho_k > p^x k - \varkappa e$ ist. Ich suche nun ein System von Logarithmen zu finden, durch das sich alle Logarithmen von $K(\mathfrak{p})$ linear und homogen mit ganzzahligen p-adischen Koeffizienten ausdrücken lassen. Um sämtliche *regulären* Logarithmen der Ordnung ϱ_k von der Form $l = \pi^{\varrho_k} w^\sigma + \cdots$ darzustellen, muß ich zunächst alle für diese Ordnungszahl möglichen Anfangsglieder durch einige unter ihnen ausdrücken. Ist ϱ_k nicht von der Form $p^{\nu_0 - \tau} \cdot p^\tau e_0 - (\nu_0 - \tau) e = p^{\nu_0} e_0 - (\nu_0 - \tau) e$, also das zugehörige Diagramm nicht vom Typus III [2]), so läßt sich nach S. 186 der ersten Arbeit zu jedem beliebigen Logarithmenindex σ ein Hauptgliedindex s bestimmen; also muß der Koeffizient w^σ des Anfangsgliedes in diesem Falle ein volles Restsystem mod $\mathfrak{p}$ durchlaufen. Ist

$$w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_f \tag{3}$$

eine Basis für alle modulo $\mathfrak{p}$ inkongruenten Zahlen von $K(\mathfrak{p})$, so kann man den Koeffizienten von π^{ϱ_k} in der Form

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_f w_f \qquad (c_i = 0, 1, \ldots, p-1) \tag{4}$$

darstellen. Nach den über ϱ_k gemachten Voraussetzungen lassen sich dann nach dem in § 2 der ersten Arbeit angegebenen Verfahren f Logarithmen

$$l_i^{(k)} = \log (1 + \pi^k w^{s_i}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, f) \tag{5}$$

auffinden, welche die f Anfangsglieder

$$\pi^{\varrho_k} w_1,\ \pi^{\varrho_k} w_2,\ \ldots,\ \pi^{\varrho_k} w_f$$

besitzen.

Ist dagegen $\varrho_k = p^{\nu_0} e_0 - (\nu_0 - \tau) e$, liegen also reguläre Logarithmen vom Diagrammtypus III vor, so hat der Koeffizient des Anfangsgliedes für $\tau = 0$, also für $k = e_0$, nach S. 183 der ersten Arbeit die Form

$$w^{-\nu_0 q} \varphi(x) \equiv w^{-\nu_0 q}(x^p - x w^g) \equiv w^{-\nu_0 q} \xi \pmod{\mathfrak{p}},$$

wo zur Abkürzung $x \equiv w^{p^{\nu_0 - 1} s} \pmod{\mathfrak{p}}$ und $\xi \equiv w^{\sigma + \nu_0 q} \pmod{\mathfrak{p}}$ gesetzt ist. Darin kann ξ nicht jeden beliebigen Wert annehmen, sondern nur die p^{f-1} Werte, die $\varphi(x)$ erhält, wenn x ein volles Restsystem modulo $\mathfrak{p}$ durchläuft. Da zu je p Zahlen

$$x_a \equiv x + a w^{g^{(0)}} \pmod{\mathfrak{p}} \qquad (a = 0, 1, \ldots, p-1)$$

derselbe ξ-Wert gehört [3]), braucht x nur alle modulo $w^{g^{(0)}}$ inkongruenten Zahlen zu durchlaufen, um alle möglichen Anfangsglieder für logarithmische Reihen der Ordnung ϱ_{e_0} zu liefern. Die erforderlichen x-Werte lassen sich daher durch eine $(f-1)$-gliedrige Basis $w_1, \ldots, w_{f-1}$ in der Form

$$x \equiv c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_{f-1} w_{f-1} \pmod{\mathfrak{p}} \tag{6}$$

darstellen, wenn $w_1, \ldots, w_{f-1}$ mit $w^{g^{(0)}}$ zusammen eine Basis modulo $\mathfrak{p}$ bilden. Die zugehörigen ξ-Werte

$$\xi_i \equiv w_i^p - w_i w^g = \varphi(w_i) \pmod{\mathfrak{p}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, f-1) \tag{7}$$

---

[1]) Band 154, S. 179, Gl. 5.
[2]) Band 154, S. 181.
[3]) Band 154, S. 188.

bilden dann eine Basis für alle ξ-Werte, die als Anfangsglieder möglich sind, denn aus (5) folgt

$$(8)\qquad \varphi(x) \equiv \varphi(c_1 w_1 + \cdots + c_{f-1} w_{f-1}) \equiv c_1 \varphi(w_1) + \cdots + c_{f-1}\varphi(w_{f-1}) \equiv c_1 \xi_1 + \cdots + c_{f-1}\xi_{f-1} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Wegen $w^\sigma \equiv \xi \cdot w^{-\nu_0 q}$ lassen sich dann auch alle Anfangskoeffizienten, die für reguläre logarithmische Reihen der Ordnung ϱ_{e_0} in Betracht kommen, durch die $(f-1)$-gliedrige Basis

$$(9)\qquad \xi_1 w^{-\nu_0 q},\quad \xi_2 w^{-\nu_0 q},\ \ldots,\ \xi_{f-1} w^{-\nu_0 q}$$

darstellen. Dann lassen sich wieder nach dem in § 2 der vorigen Arbeit angegebenen Verfahren $f-1$ Logarithmen

$$(10)\qquad \overset{(e_0)}{l_i} = \log(1 + \pi^{e_0} w^{s_i}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, f-1)$$

auffinden, welche die $f-1$ Anfangsglieder

$$\pi^{\varrho_{e_0}} \xi_1 w^{-\nu_0 q},\quad \pi^{\varrho_{e_0}} \xi_2 w^{-\nu_0 q},\ \ldots,\ \pi^{\varrho_{e_0}} \xi_{f-1} w^{-\nu_0 q}$$

besitzen. Dabei ist s_i so gewählt, daß $w^{p^{\nu_0 - 1} s_i} \equiv w_i$ (modulo $\mathfrak{p}$) ist. Entsprechend zeigt man, daß auch zu den Ordnungszahlen $\varrho_{e_0 p}$, $\varrho_{e_0 p^2}$, $\ldots$, $\varrho_{e_0 p^{\nu_0 - 1}}$ je $f-1$ Basislogarithmen gehören.

Durch die so bestimmten Logarithmen (5) bzw. (10) lassen sich nun sämtliche regulären Logarithmen derselben Ordnung ϱ_k modulo $\mathfrak{p}^{\varrho_k + 1}$ darstellen. Ist nämlich

$$l = \pi^{\varrho_k} w^\sigma + \cdots = \pi^{\varrho_k}(c_{1k} w_1 + c_{2k} w_2 + \cdots + c_{fk} w_f) + \cdots$$

ein beliebiger Logarithmus ϱ_k-ter Ordnung, so besitzt er mit dem Aggregat

$$\overset{(k)}{c_{1k} l_1} + \overset{(k)}{c_{2k} l_2} + \cdots + \overset{(k)}{c_{fk} l_f}$$

das gleiche Anfangsglied; also unterscheiden sich beide um einen Logarithmus l_{k+1} von mindestens ϱ_{k+1}-ter Ordnung, so daß man hat

$$(11)\qquad l = \overset{(k)}{c_{1k} l_1} + \overset{(k)}{c_{2k} l_2} + \cdots + \overset{(k)}{c_{fk} l_f} + l_{k+1}.$$

Ist l_{k+1} ebenfalls regulär, so bildet man entsprechend zu (5) die Basislogarithmen $\overset{(k+1)}{l_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, f)$ für die Ordnungszahl ϱ_{k+1} und erhält ebenso

$$l_{k+1} = \overset{(k+1)}{c_{1,k+1} l_1} + \overset{(k+1)}{c_{2,k+1} l_2} + \cdots + \overset{(k+1)}{c_{f,k+1} l_f} + l_{k+2}$$

und so fort. Kommt man dabei zu einer Ordnungszahl der Form $\varrho_{e_0 p^\tau} = p^{\nu_0} e_0 - (\nu_0 - \tau) e$, so ersetzt man die f-gliedrige Basis (5) durch die $(f-1)$-gliedrige Basis (10). Durch Summierung erhält man daher für l die Darstellung

$$(12)\qquad l = \sum_1^\infty{}_m \sum_1^f{}_i \, c_{i,k+m} \overset{(k+m)}{l_i},$$

worin nur zu beachten ist, daß $\overset{(e_0 p^\tau)}{l_f} = 0$ zu setzen ist.

Nun sind aber nicht für jede Ordnungszahl neue Basislogarithmen erforder-

lich, sondern alle regulären Logarithmen, deren Ordnungszahlen modulo e kongruent sind, lassen sich durch dieselbe Basis (5) bzw. (10) darstellen. Es gilt nämlich wegen $p = \pi^e w^q + \cdots$ für das Anfangsglied eines Logarithmus der Ordnung $\varrho_K = \varrho_k + ne$ für $n > 0$ die Kongruenz:

$$(13\,a)\quad l_K = \pi^{\varrho_k + ne} w^{\sigma_n} + \cdots \equiv p^n \pi^{\varrho_k} w^{\sigma_n - nq} + \cdots \equiv p^n (c_{1k}\overset{(k)}{l_1} + c_{2k}\overset{(k)}{l_2} + \cdots + c_{fk}\overset{(k)}{l_f})$$
$$\equiv C_1\overset{(k)}{l_1} + C_2\overset{(k)}{l_2} + \cdots + C_f\overset{(k)}{l_f} \pmod{\mathfrak{p}^{\varrho_K+1}}$$

bzw. für $k = e_0$:

$$(13\,b)\quad l_K = \pi^{\varrho_{e_0} + \tau e} \xi_\tau\, w^{-(\nu_0 - \tau)q} \equiv p^\tau \pi^{\varrho_{e_0}} \xi_\tau w^{-\nu_0 q} \equiv p^\tau (c_{1e_0}\overset{(e_0)}{l_1} + c_{2e_0}\overset{(e_0)}{l_2} + \cdots + c_{f-1e_0}\overset{(e_0)}{l_{f-1}})$$
$$\equiv C_1\overset{(e_0)}{l_1} + C_2\overset{(e_0)}{l_2} + \cdots + C_{f-1}\overset{(e_0)}{l_{f-1}} \pmod{\mathfrak{p}^{\varrho_K+1}}.$$
$$(\text{für } \tau = 0, 1, \ldots, \nu_0 - 1).$$

Dagegen braucht man für die regulären Logarithmen der Ordnung $\varrho_{e_0} + \nu_0 e = p^{\nu_0} e_0$, die sämtlich zu regulären Exponentialeinheiten gehören, wieder eine f-gliedrige Basis. Man erhält sie, wenn man zu den $f - 1$ Logarithmen

$$(13)\qquad p^{\nu_0}\overset{(e_0)}{l_1},\quad p^{\nu_0}\overset{(e_0)}{l_2},\ \ldots,\ p^{\nu_0}\overset{(e_0)}{l_{f-1}}$$

ein f-tes Element der Ordnung $\varrho_{e_0} + \nu_0 e$ hinzufügt, dessen Anfangskoeffizient nicht durch deren Anfangskoeffizienten:

$$\xi_1,\quad \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{f-1}$$

darstellbar ist. Dieser f-te Logarithmus der Ordnung $e_0 p^{\nu_0}$ kann nicht das p^{ν_0}-fache des irregulären Logarithmus

$$\log(1 + \pi^{e_0} w^{g_0}) = \pi^{\overline{\varrho}_{e_0}} w^{\bar{\sigma}} + \cdots$$

sein, denn wegen $\overline{\varrho}_{e_0} > \varrho_{e_0}$ ist dessen Logarithmenordnung höher als $\varrho_{e_0} + \nu_0 e$. Dagegen hat Herr *Hensel* gezeigt [1]), daß

$$(14)\qquad \overset{(e_0 p^{\nu_0})}{l} = \log(1 + \Pi^p \xi_0)$$

als der gewünschte Ersatzlogarithmus verwendet werden kann, wenn

$$(14\,a)\quad \Pi = \sqrt[p-1]{-p} = \pi^{e^{(0)}} w^{g^{(0)}} + \cdots = \pi^{e_0 p^{\nu_0 - 1}} w^{g_0 p^{\nu_0 - 1}} + \cdots$$

die in dem Körper vorhandene $(p-1)$-te Wurzel aus $(-p)$ bedeutet, und die Spur von ξ_0 nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Schreibt man nämlich die Logarithmen (13) in der Form

$$p^{\nu_0}\overset{(e_0)}{l_i} = \pi^{e_0 p^{\nu_0}} w^{g_0 p^{\nu_0}} \xi_i w^{-g_0 p^{\nu_0}} + \cdots = \pi^{e_0 p^{\nu_0}} w^{g_0 p^{\nu_0}} \left[(w_i w^{-g^{(0)}})^p - w_i w^{-g^{(0)}} \right] + \cdots$$
$$= \pi^{e_0 p^{\nu_0}} w^{g_0 p^{\nu_0}} \overline{\xi}_i + \cdots,$$

wo zur Abkürzung

$$\overline{\xi}_i = \xi_i w^{-g^{(0)} p} = (-1)\left[w_i w^{-g^{(0)}} - (w_i w^{-g^{(0)}})^p \right] + \cdots = (-1)\left[\overline{w}_i - \overline{w}_i^p \right] + \cdots$$

gesetzt ist, so erkennt man, daß die Spur dieser $f - 1$ Zahlen

---

[1]) H. V.

$$S(\bar{\xi}_i) \equiv (-1)\{\bar{w}_i - \bar{w}_i^p + \bar{w}_i^p - \bar{w}_i^{p^2} + \cdots + \bar{w}_i^{p^{f-1}} - \bar{w}_i\} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist; also gilt das Gleiche von der Spur aller durch sie darstellbaren Zahlen

$$c_1\bar{\xi}_1 + c_2\bar{\xi}_2 + \cdots + c_{f-1}\bar{\xi}_{f-1}.$$

Also ist eine Zahl ξ_0, deren Spur nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist, sicher nicht durch $\bar{\xi}_1 \ldots \bar{\xi}_{f-1}$ darstellbar, also als Koeffizient des Ersatzlogarithmus zu verwenden.

Folglich besteht für das Anfangsglied eines Logarithmus der Ordnung $\varrho_{e_0} + (\nu_0 + n)e$ wieder eine Kongruenz von der Form

$$(13\,c) \qquad l_K = \pi^{\varrho_{e_0}+(\nu_0+n)e}\xi + \cdots \equiv C_1 p^{\nu_0}\overset{(e_0)}{l}_1 + C_2 p^{\nu_0}\overset{(e_0)}{l}_2 + \cdots + C_{f-1}p^{\nu_0}\overset{(e_0)}{l}_{f-1} + C_f\overset{(e_0 p^{\nu_0})}{l} \pmod{\mathfrak{p}^{\varrho_K+1}}.$$

Aus den drei Kongruenzen (13a), (13b), (13c) für die Anfangsglieder folgt wieder wie unter (11) die Gleichung

$$l_K = C_{1K}\overset{(k)}{l}_1 + C_{2K}\overset{(k)}{l}_2 + \cdots + C_{fK}\overset{(k)}{l}_f + l_{K+1} \quad (\mathfrak{p})$$

Darin ist $\overset{(e_0 p^\tau)}{l}_f$ für $\tau = 0, 1, \ldots, \nu_0 - 1$ gleich 0 zu setzen, $\overset{(e_0 p^{\nu_0+ne})}{l}_f$ ist das p^n-fache des Ersatzlogarithmus (14).

Für $k \gtrless e_0 p^{\nu_0} + ne$ sind alle C_{iK} durch dieselbe Potenz p^n teilbar, für $k = e_0 p^{\nu_0} + ne$ dagegen sind die $f-1$ ersten Koeffizienten durch p^{ν_0+n}, der letzte dagegen nur durch p^n teilbar.

Es soll deshalb — zunächst für die regulären Logarithmen von $K(\mathfrak{p})$ — eine Einteilung in e Klassen

$$(15) \qquad K_1, \quad K_2, \quad \ldots, \quad K_e$$

eingeführt werden, nach welcher alle und nur die in dieselbe Klasse gehören, deren Ordnungszahlen modulo e kongruent sind. Dann braucht man nur für die jeweils niedrigsten Ordnungszahlen jeder Klasse, die sogenannten „reduzierten" Ordnungen

$$(16) \qquad \varrho_1, \quad \varrho_2, \quad \ldots, \quad \varrho_e$$

eine Basis von je f Logarithmen $\overset{(k)}{l}_i$ der Form (5) bzw. für die zum Grad e_0 gehörige Ordnung eine Basis von $f-1$ Logarithmen der Form (10) nebst dem Ersatzlogarithmus (14) aufzustellen, denn es gilt der einfache Satz:

Die Anfangsglieder aller regulären Logarithmen derselben Klasse K_h lassen sich durch die gleiche f-gliedrige Basis

$$(17\,a) \qquad \overset{(k_h)}{l}_i = \log(1 + \pi^{k_h}w^{s_i}) = \pi^{\varrho_{k_h}}w_h + \cdots \qquad (i = 1, \ldots, f)$$

bzw. für $k_h = e_0$ durch die f Elemente

$$(17\,b) \qquad \begin{cases} \overset{(e_0)}{l}_i = \log(1 + \pi^{e_0}w^{s_i}) = \pi^{\varrho_{e_0}}(w^{s_i} - w^{ps_i}w^{-g}) + \cdots & (i = 1, \ldots, f-1) \\ \overset{(e_0 p^{\nu_0})}{l} = \log(1 + \Pi^p\xi_0) = \pi^{\varrho_{e_0}+\nu_0 e}w^{g_0 p^{\nu_0}}\xi_0 + \cdots \end{cases}$$

darstellen.

Die Berechnung der e reduzierten Ordnungen (16) geschieht folgendermaßen: Man bildet nach der oft benutzten Formel (5) von § 1, S. 179 der ersten Arbeit:

$$\varrho_k = p^{\varkappa} k - \varkappa e$$

diejenigen Ordnungszahlen, die zu den nicht durch p teilbaren Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, r+e$ als Graden gehören. Ist nämlich $k_1 = p^{\tau} k$ und k eine Einheit modulo p, so ist $\varkappa_{k_1} = \varkappa_k - \tau$, denn aus

$$p^{\varkappa_k} > \frac{e}{p-1} \quad \text{folgt} \quad p^{\varkappa_k - \tau}(p^{\tau} k) > \frac{e}{p-1}.$$

Daher ist

$$\varrho_{k_1} - \varrho_k = p^{\varkappa_k} k - (\varkappa_k - \tau) e - (p^{\varkappa_k} k - \varkappa_k e) = \tau e \equiv 0 \pmod{e},$$

also gehören die Logarithmen dieser beiden Ordnungen derselben Klasse an; das System (16) darf also nur den kleinsten Wert, der zur Einheit k gehört, enthalten. Die zu diesen Einheitsgraden $k_1, k_2, \ldots, k_e$ gehörigen Ordnungen sind modulo e inkongruent, denn aus $\varrho_{k'} = \varrho_k + \mu e$ würde folgen

$$k' = \frac{\varrho_{k'} + \varkappa_{k'} e}{p^{\varkappa_{k'}}} = \frac{\varrho_k + \mu e + (\varkappa_k - \mu) e}{p^{\varkappa_k - \mu}} = p^{\mu} k,$$

entgegen der Voraussetzung, daß k eine Einheit modulo p ist. Da die Gesamtzahl aller Einheiten zwischen 1 und $r+e$ gleich $r + e - \left[\frac{r+e}{p}\right] = r + e - r = e$ ist, so erhält man auf diese Weise in der Tat alle und nur die e reduzierten Ordnungen.

In dem auf S. 182 von § 1 der ersten Arbeit angegebenen Beispiel gehören die reduzierten Ordnungen zu den nicht durch 3 teilbaren Graden zwischen 1 und $11 + 5 = 16$, haben also die Werte

$$\varrho_1 = -13; \quad \varrho_2 = -5; \quad \varrho_4 = +1; \quad \varrho_0 = +4;$$
$$\varrho_7 = 7; \quad \varrho_8 = 8; \quad \varrho_{10} = 10; \quad \varrho_{11} = 11; \quad \varrho_{13} = 13; \quad \varrho_{14} = 14; \quad \varrho_{16} = 16.$$

Wegen dieser einfachen Zusammenhänge treten in der Doppelsumme (12) nur $\lambda = e \cdot f$ verschiedene Basislogarithmen

$$\overset{(k)}{l}_i \qquad \begin{pmatrix} k = k_1, k_2, \ldots, k_e \\ i = 1, 2, \ldots, f \end{pmatrix}$$

auf, wobei nur zu beachten ist, daß an Stelle von $\overset{(e_0)}{l}$ der Ersatzlogarithmus $\overset{(e_0 p^{\nu_0})}{l}$ treten muß. Ordnet man nach diesen λ Elementen und berücksichtigt, daß nach (13a) und (13b) auf S. 228 zu gleichen Logarithmen gehörige Koeffizienten durch immer höhere Potenzen von p teilbar werden, so erhält man das Ergebnis:

Alle regulären Logarithmen eines Körpers $K(\mathfrak{p})$ vom Grade λ lassen sich durch ein Fundamentalsystem von λ Logarithmen zweigliedriger Einseinheiten

$$(17) \qquad \overset{(k)}{l}_i = \log(1 + \pi^k w^{s_i}) = \pi^{\varrho_k} w_i + \cdots \qquad \begin{pmatrix} k = k_1, \ldots, k_e \\ i = 1, \ldots, f \end{pmatrix},$$

wobei für $\overset{(e_0)}{l}_f$ der Ersatzlogarithmus $\overset{(e_0 p^{\nu_0})}{l}$ einzusetzen ist, in der Form

$$l = c_1 l_1 + c_2 l_2 + \cdots + c_\lambda l_\lambda \quad (\mathfrak{p})$$

darstellen. Die Koeffizienten dieser Darstellung

$$c_i = c_{i0} + c_{i1} p + c_{i2} p^2 + \cdots$$

sind ganze rationale p-adische Zahlen. Das Fundamentalsystem zerfällt in e Reihen von je f Logarithmen gleicher Ordnung, deren Anfangskoeffizienten $(w_1, w_2, \ldots, w_f)$ eine Basis modulo $\mathfrak{p}$ bilden. Nur im Falle $k = e_0$ besteht die Reihe aus $f - 1$ Logarithmen der Ordnung ϱ_{e_0} und dem Ersatzlogarithmus der Ordnung $e_0 p^{\nu_0}$; die f Anfangskoeffizienten dieser Reihe: $(\xi_1 w^{-\nu_0 q}, \ldots, \xi_{f-1} w^{-\nu_0 q}, \xi_0)$ sind so beschaffen, daß $(\xi_1, \ldots, \xi_{f-1}, \xi_0)$ ebenfalls eine Basis modulo $\mathfrak{p}$ bilden. Die Ordnungszahlen der verschiedenen Reihen sind die reduzierten Ordnungen der e logarithmischen Klassen $K_1, \ldots, K_e$, also die kleinsten regulären Ordnungen, die modulo e inkongruent sind; sie gehören zu den Einheiten $k_1, \ldots, k_e$ aus der Reihe $1, 2, \ldots, r + e$ als Graden.

Um nun auch die *irregulären* Logarithmen von $K(\mathfrak{p})$ darzustellen, müssen in das Fundamentalsystem eine Anzahl irregulärer Logarithmen aufgenommen werden. Da $K(\mathfrak{p})$ nach Voraussetzung die p^{ν_ε}-ten Einheitswurzeln enthält, so existieren nach S. 197 der ersten Arbeit darin die Logarithmen

$$(18) \qquad \overline{L}_{e_0} = \log \bar{\eta}_0, \quad \overline{L}_{e_0 p} = \log \bar{\eta}_1, \ \ldots, \ \overline{L}_{e_0 p^{\nu_0 - \nu_\varepsilon - 1}} = \log \bar{\eta}_{\nu_0 - \nu_\varepsilon - 1}$$

von den höchsten Irregularitätsordnungen

$$(19) \qquad \overline{P}_{e_0}, \quad \overline{P}_{e_0 p}, \ \ldots, \ \overline{P}_{e_0 p^{\nu_0 - \nu_\varepsilon - 1}}.$$

Diese Ordnungen sind *kleiner* als die ihnen modulo e kongruenten reduzierten Ordnungen ϱ_h. Ist nämlich

$$(20\,a) \qquad \overline{P}_{e_0 p^\tau} = \varrho_h - n_h e < \varrho_h, \quad \text{also } n_h > 0,$$

so existiert sicher kein regulärer Logarithmus von gleicher Ordnung, da die reduzierten Ordnungen nach Definition die niedrigsten unter allen modulo e kongruenten regulären Ordnungen sind. Wäre dagegen $\overline{P}_{e_0 p^\tau} = \varrho_h + me > \varrho_h$, so wäre

$$k = \frac{\overline{P}_{e_0 p^\tau} + \bar{\varkappa} e}{p^{\bar{\varkappa}}} = \frac{\varrho_h + me + \bar{\varkappa} e}{p^{\bar{\varkappa}}} = \frac{p^{\varkappa_h} k_h - \varkappa_h e + me + (\varkappa_h - m) e}{p^{\varkappa_h - m}} = p^m k_h$$

eine ganze Zahl, also $\overline{P}_{e_0 p^\tau}$ keine höchste Irregularitätsordnung. Nur wenn $\overline{P}_{e_0 p^\tau}$ die Form $\varrho_{e_0} + me$ besitzt, ist es *größer* als die modulo e kongruente reduzierte Ordnung ϱ_{e_0}, aber wegen $m < \nu_0$ *kleiner* als die Ordnung $\varrho_{e_0 p^{\nu_0}} = \overset{(0)}{\varrho} = e_0 p^{\nu_0}$ des Ersatzlogarithmus, läßt sich also ebenfalls in der Form schreiben:

$$(20\,b) \qquad \overline{P}_{e_0 p^{\nu_0}} = \overset{(0)}{\varrho} - \overset{(0)}{n} e \quad \text{für } \overset{(0)}{n} > 0.$$

Durch das System (18) nebst den λ regulären Fundamentallogarithmen lassen sich dann alle irregulären Logarithmen des Körpers darstellen. Ist nämlich $\bar{\bar{\eta}}_\tau = 1 + \pi^{e_0 p^\tau} w^{g_0 p^\tau} a + \cdots$ eine beliebige irreguläre Einseinheit des Grades

$e_0 p^\tau$, so ist $\bar{\eta}_\tau^a$ dazu äquivalent, also der Quotient $\frac{\bar{\bar{\eta}}_\tau}{\bar{\eta}_\tau^a} = 1 + x_1$ eine Einseinheit höheren Grades, der seinerseits wieder durch Division mit einer äquivalenten regulären Einseinheit oder einer irregulären von höchstem Irregularitätsgrad weiter erhöht werden kann. Da man nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu einer Einseinheit von höherem als r-tem Grade, also sicher zu einer regulären Einseinheit η kommt, so folgt aus der Zerfällung

$$\bar{\bar{\eta}}_\tau = \bar{\eta}_\tau^a \cdot \bar{\eta}_{\tau_1}^{a_1} \cdots \eta, \tag{21}$$

daß in der Tat jeder beliebige irreguläre Logarithmus durch das System (18) und die regulären Fundamentallogarithmen darstellbar ist.

Man braucht nun in das Fundamentalsystem nicht sämtliche Logarithmen der Reihe (18) aufzunehmen, sondern die höchsten Irregularitätsordnungen (19) zerfallen in eine Anzahl von Reihen, für welche die zugehörigen irregulären Logarithmen von höchster Ordnung jedesmal durch denselben irregulären Fundamentallogarithmus darstellbar sind.

Ist zunächst $\bar{\mathfrak{P}}_{e_0}$ von der Form (20b):

$$\bar{\mathfrak{P}}_{e_0} = \varrho_{e_0} + me = \overset{(0)}{\varrho} - \overset{(0)}{n} e \qquad (\overset{(0)}{n} > 0),$$

so können alle irregulären Logarithmen der Grade

$$e_0, \quad e_0 p, \ldots, e_0 p^{\nu_0 - \nu_\varepsilon - 1}$$

durch $\bar{L}_0 = \pi^{\bar{\mathfrak{P}}_{e_0}} \bar{\xi}_0 + \ldots$ dargestellt werden. Dann besitzen nämlich seine Vielfachen

$$p\bar{L}_0 = \pi^{\bar{\mathfrak{P}}_{e_0} + e} \bar{\xi} w^q + \ldots, \quad \ldots, \quad p^{\overset{(0)}{n-1}} \bar{L}_0 = \pi^{\bar{\mathfrak{P}}_{e_0} + \overset{(0)}{(n-1)} e} w^{\overset{(0)}{(n-1)} q} + \ldots$$

die Ordnungszahlen

$$\overset{(0)}{\varrho} - (\overset{(0)}{n} - 1) e, \quad \ldots, \quad \overset{(0)}{\varrho} - e$$

von derselben Form; und die Anfangskoeffizienten

$$\bar{\xi} w^{\tau q} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, \overset{(0)}{n} - 1)$$

bedingen ebenfalls eine unlösbare Indexkongruenz, denn da sich $\bar{\xi}$ nach Voraussetzung nicht durch die $(f-1)$-gliedrige Basis $(\xi_1, \ldots, \xi_{f-1})$ ausdrücken läßt, gilt das gleiche von $\bar{\xi} w^{\tau q}$ in bezug auf die $(f-1)$-gliedrige Basis $(\xi_1 w^{\tau q}, \ldots, \xi_{f-1} w^{\tau q})$, die von den Anfangskoeffizienten von $p^\tau \overset{(e_0)}{l_1}, \ldots, p^\tau \overset{(e_0)}{l_{f-1}}$ gebildet wird. Also sind die Vielfachen $p^\tau \bar{L}_0$ Logarithmen von höchster Irregularitätsordnung für die entsprechenden Grade $e_0 p^\tau$. Dagegen besitzt $p^{n\overset{(0)}{}} \bar{L}_0$ die Ordnung $\overset{(0)}{\varrho} = \varrho_{e_0} + \nu_0 e > r$, also sind für die irregulären Logarithmen der Grade $e_0 \overset{(0)}{p^n}, \ldots, e_0 p^{\nu_0 - 1}$ nur die regulären Fundamentallogarithmen erforderlich. Da dann eine irreguläre Einheitswurzel des Grades $e_0 \overset{(0)}{p^n}$ existiert, kann $\overset{(0)}{n} = \nu_0 - \nu_\varepsilon$ gesetzt werden.

Ist andererseits $\bar{\mathfrak{P}}_{e_0}$ von der Form (20a)

$$\bar{\mathfrak{P}}_{e_0} = \varrho_{h_0} - ne,$$

also kleiner als eine reguläre reduzierte Ordnungszahl, so gilt das Gleiche von den Ordnungen

$$\overline{\mathsf{P}}_{e_0} + e, \quad \overline{\mathsf{P}}_{e_0} + 2e, \ \ldots, \ \overline{\mathsf{P}}_{e_0} + (n-1)e,$$

welche die Vielfachen

$$p\overline{L}_0, \quad p^2\overline{L}_0, \ \ldots, \ p^{n-1}\overline{L}_0$$

besitzen; also sind diese als Logarithmen von höchster Irregularitätsordnung für die Grade

$$e_0 p, \quad e_0 p^2, \ \ldots, \ e_0 p^{n-1}$$

zu verwenden. Zu $p^n\overline{L}_0$ dagegen gehört die reduzierte Ordnung ϱ_{h_0} selbst, so daß die Ordnungszahl der irregulären Logarithmen des Grades $e_0 p^n$ noch weiter erhöht werden kann. Diese Erhöhung läßt sich entweder bis ins Unendliche fortsetzen; dann existiert eine irreguläre Einheitswurzel des Grades $e_0 p^n = e_0 p^{\nu_0 - \nu_\varepsilon}$; also ist $\overline{L}_0$ der einzige erforderliche irreguläre Fundamentallogarithmus. Ist dagegen $n < \nu_0 - \nu_\varepsilon$, so gelangt man bei dieser Erhöhung wieder zu einer endlichen höchsten Irregularitätsordnung $\overline{\mathsf{P}}_{e_0 p^n} = \varrho_{h_1} - n_1 e$ mit $n_1 > 0$. Durch einen Logarithmus $\overline{L}_1$ von dieser Ordnung sind dann alle irregulären Logarithmen von Einseinheiten der Grade

$$e_0 p^n, \quad e_0 p^{n+1}, \ \ldots, \ e_0 p^{n+n_1-1}$$

darstellbar, denn die Vielfachen

$$\overline{L}_1, \quad p\overline{L}_1, \ \ldots, \ p^{n_1-1}\overline{L}_1$$

besitzen die höchsten Irregularitätsordnungen

$$\bar{\varrho}_{h_1} - n_1 e, \quad \varrho_{h_1} - (n_1 - 1)e, \ \ldots, \ \varrho_{h_1} - e,$$

während $p^{n_1}\overline{L}_1$ wieder die reguläre reduzierte Ordnung ϱ_{h_1} besitzt, also noch nicht von höchster Irregularitätsordnung ist. So fortschließend gelangt man schließlich zu einem Logarithmus $p^{n_{\varepsilon-1}}\overline{L}_{\varepsilon-1}$ von der regulären Ordnung $\varrho_{h\varepsilon-1}$, der zu einer Einseinheit des Grades $e_0 p^{\nu_0 - \nu_\varepsilon}$ gehört, für den also wegen der vorausgesetzten Existenz der irregulären Einheitswurzeln dieses Grades die zugehörige höchste Irregularitätsordnung den Wert $+\infty$ besitzt. Also sind $\overline{L}_0, \overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_{\varepsilon-1}$ die einzigen irregulären Logarithmen, welche in das Fundamentalsystem aufgenommen werden müssen. Für die in (20a) auftretenden Zahlen $n_h = n, n_1, \ldots, n_{\varepsilon-1}$ läßt sich eine andere Schreibweise einführen, die für die Grade der zu den höchsten Irregularitätsordnungen gehörigen Einseinheiten einfachere Ausdrücke liefert. Da nämlich $\overline{\mathsf{P}}_{e_0} + \nu_0 e > r + e$, also größer als alle regulären reduzierten Ordnungen ist, so kann man eine positive Zahl $\nu_1 < \nu_0$ bestimmen, so daß

$$\overline{\mathsf{P}}_{e_0} + \nu_0 e = \varrho_{h_0} + \nu_1 e,$$

also

$$\overline{\mathsf{P}}_{e_0} = \varrho_{h_0} - (\nu_0 - \nu_1)e$$

ist, so daß $n = \nu_0 - \nu_1$ gesetzt werden kann. Entsprechend liegt $\overline{\mathsf{P}}_{e_0 p^{\nu_0 - \nu_1}} + \nu_1 e$ oberhalb $r + e$; also besteht wieder eine Gleichung

$$\overline{\mathsf{P}}_{e_0 p^{\nu_0-\nu_1}} + \nu_1 e = \varrho_{h_1} + \nu_2 e$$

oder

$$\overline{\mathsf{P}}_{e_0 p^{\nu_0-\nu_1}} = \varrho_{h_1} - (\nu_1 - \nu_2)e,$$

so daß n_1 durch $\nu_1 - \nu_2$ ersetzt werden kann. Fährt man so fort, die Zahlen n_i durch die Differenzen $\nu_i - \nu_{i+1}$ zu ersetzen, so erhält man für die höchsten Irregularitätsordnungen sämtlicher Grade die Übersicht:

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{llll}
\overline{\mathsf{P}}_0 = \overline{\mathsf{P}}_{e_0} & = \varrho_{h_0} - (\nu_0 - \nu_1)e & \overline{\mathsf{P}}_1 = \overline{\mathsf{P}}_{e_0 p^{\nu_0-\nu_1}} & = \varrho_{h_1} - (\nu_1 - \nu_2)e \\
\quad \overline{\mathsf{P}}_{e_0 p} & = \varrho_{h_0} - (\nu_0 - \nu_1 - 1)e & \quad \overline{\mathsf{P}}_{e_0 p^{\nu_0-\nu_1+1}} & = \varrho_{h_1} - (\nu_1 - \nu_2 - 1)e \\
\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\quad \overline{\mathsf{P}}_{e_0 p^{\nu_0-\nu_1-1}} & = \varrho_{h_0} - e & \quad \overline{\mathsf{P}}_{e_0 p^{\nu_0-\nu_2-1}} & = \varrho_{h_1} - e \\
\overline{\mathsf{P}}_{\varepsilon-1} = \overline{\mathsf{P}}_{e_0 p^{\nu_0-\nu_{\varepsilon-1}}} & = \varrho_{h_{\varepsilon-1}} - (\nu_{\varepsilon-1} - \nu_\varepsilon)e & \overline{\mathsf{P}}_\varepsilon = \overline{\mathsf{P}}_{e_0 p^{\nu_0-\nu_\varepsilon}} & \\
\quad \overline{\mathsf{P}}_{e_0 p^{\nu_0-\nu_{\varepsilon-1}+1}} & = \varrho_{h_{\varepsilon-1}} - (\nu_{\varepsilon-1} - \nu_\varepsilon - 1)e & \quad = \overline{\mathsf{P}}_{e_0 p^{\nu_0-\nu_\varepsilon+1}} & \Big\} = +\infty. \\
\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \quad \dots\dots\dots & \\
\quad \overline{\mathsf{P}}_{e_0 p^{\nu_0-\nu_\varepsilon-1}} & = \varrho_{h_{\varepsilon-1}} - e & \quad = \overline{\mathsf{P}}_{e_0 p^{\nu_0-1}} &
\end{array}\right.$$

Die Anfangsglieder der Vertikalreihen

$$\overline{\mathsf{P}}_0, \quad \overline{\mathsf{P}}_1, \dots, \overline{\mathsf{P}}_{\varepsilon-1}; \quad (\overline{\mathsf{P}}_\varepsilon = +\infty)$$

stellen jedesmal diejenige höchste Irregularitätsordnung dar, zu der ein irregulärer Fundamentallogarithmus

$$\overline{L}_0, \quad \overline{L}_1, \dots, \overline{L}_{\varepsilon-1}; \quad (\overline{L}_\varepsilon = 0)$$

gehört. Man kann also das Ergebnis aussprechen:

Existieren in einem Körper die p^{ν_ε}-ten irregulären Einheitswurzeln, so lassen sich sämtliche irreguläre Logarithmen durch ε irreguläre Fundamentallogarithmen

$$(23)\qquad \overline{L}_0, \quad \overline{L}_1, \dots, \overline{L}_{\varepsilon-1}$$

von den höchsten Irregularitätsordnungen

$$(24)\qquad \overline{\mathsf{P}}_i = \varrho_{h_i} - (\nu_i - \nu_{i+1})e \qquad (i = 0, 1, \dots, \varepsilon - 1)$$

und die regulären Fundamentallogarithmen darstellen, denn das System

$$\overline{L}_0, \ p\overline{L}_0, \dots, p^{\nu_0-\nu_1-1}\overline{L}_0; \dots; \overline{L}_{\varepsilon-1}, \ p\overline{L}_{\varepsilon-1}, \dots, p^{\nu_{\varepsilon-1}-\nu_\varepsilon-1}\overline{L}_{\varepsilon-1}$$

bildet ein System von Logarithmen höchster Irregularitätsordnung für die Grade

$$e_0, \ e_0 p, \dots, e_0 p^{\nu_0-\nu_1-1}; \dots; e_0 p^{\nu_0-\nu_\varepsilon-1}, \ e_0 p^{\nu_0-\nu_\varepsilon-1+1}, \dots \ e_0 p^{\nu_0-\nu_\varepsilon-1},$$

während die irregulären Logarithmen aller höheren Grade, denen irreguläre Einheitswurzeln entsprechen, allein durch die regulären Fundamentallogarithmen darstellbar sind.

Um alle regulären und irregulären Logarithmen von $K(\mathfrak{p})$ darzustellen, kann man daher das für die regulären Logarithmen erforderliche Fundamentalsystem aus den $\lambda = e \cdot f$ regulären Elementen

$$l_1, l_2, \ldots, l_{\lambda-1}; \quad \overset{(e_0 p^{\nu_0})}{l}$$

folgendermaßen umformen: Man ersetzt in der Reihe mit der Ordnungszahl ϱ_{h_i}:

$$\pi^{\varrho h_i} w_1 + \ldots, \quad \pi^{\varrho h_i} w_2 + \cdots, \quad \cdots, \quad \pi^{\varrho h_i} w_f + \cdots \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \varepsilon - 1)$$

ein bestimmtes Element durch denjenigen Logarithmus von höchster Irregularitätsordnung

$$\overline{L}_i = \pi^{\varrho_{h_i} - n_i e} \overline{w}^i + \cdots \qquad (i = 0, 1, \ldots, \varepsilon - 1),$$

dessen Ordnung $\overline{\mathsf{P}}_i$ zu ϱ_{h_i} modulo e kongruent ist, und zwar so, daß die Anfangskoeffizienten der übrigen $f-1$ Elemente der Ordnung ϱ_{h_i} mit $\overline{w}_i w^{n_i q}$ zusammen wieder eine Basis modulo $\mathfrak{p}$ bilden. Das ist stets möglich; denn ist

$$\overline{w}_i w^{n_i q} \equiv c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_f w_f \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}),$$

so ist darin mindestens ein Koeffizient, etwa c_1, von Null verschieden; also bilden

$$\overline{w}_i w^{n_i q}; \quad w_2, \ldots, w_f$$

ebenfalls eine Basis modulo $\mathfrak{p}$. Dann sind alle nicht äquivalenten regulären Logarithmen der Ordnung ϱ_{h_i} durch die f Logarithmen

$$(25) \qquad p^{n_i} \overline{L}_i; \quad \overset{(h_i)}{l}_2, \ldots, \overset{(h_i)}{l}_f \qquad (i = 0, 1, \ldots, \varepsilon - 1)$$

darstellbar, denn $p^{n_i} \overline{L}_i$ besitzt die Ordnung ϱ_{h_i} und den Anfangskoeffizienten $\overline{w}_i w^{n_i q}$.

Ist eine der höchsten Irregularitätsordnungen von der Form (20b) $\overset{(0)}{\varrho} - \overset{(0)}{n} e$, was nach dem vorhergehenden nur für $\overline{\mathsf{P}}_{\varepsilon-1}$ eintreten kann, da die aus $(\overset{(0)}{\varrho} - \overset{(0)}{n} e) + \overset{(0)}{n} e$ abzuleitende höchste Irregularitätsordnung bereits den Wert $+\infty$ besitzt, so kann $\overline{L}_{\varepsilon-1}$ an die Stelle des Ersatzlogarithmus $\overset{(e_0 p^{\nu_0})}{l}$ treten. Da nämlich nach Voraussetzung der Anfangskoeffizient $\overline{\xi}_0$ von $\overline{L}_{\varepsilon-1} = \pi^{\overset{(0)}{\varrho} - \overset{(0)}{n} e} \overline{\xi}_0 + \cdots$ nicht durch die $f-1$ Anfangskoeffizienten der regulären Basislogarithmen derselben Ordnung

$$p^{\nu_0 - \overset{(0)}{n}} l_i = \pi^{\varrho e_0 + \nu_0 e - \overset{(0)}{n} e} \xi_i w^{(\nu_0 - \overset{(0)}{n}) q} + \cdots \qquad (i = 1, 2, \ldots, f-1)$$

darstellbar ist, so gilt das gleiche von dem Anfangskoeffizienten $\overline{\xi}_0 \overset{(0)}{w}{}^{n q}$ von

$$\overset{(0)}{p}{}^{n} \overline{L}_{\varepsilon-1} = \pi^{\overset{(0)}{\varrho}} \overset{(0)}{w}{}^{n q} \overline{\xi}_0 + \cdots$$

in bezug auf die $f-1$ Anfangskoeffizienten von

$$p^{\nu_0} l_i = \pi^{\overset{(0)}{\varrho}} \xi_i w^{\nu_0 q} + \cdots \qquad (i = 1, 2, \ldots, f-1).$$

Also kann $\overset{(0)}{p}{}^{n} \overline{L}_{\varepsilon-1}$ an Stelle des Ersatzlogarithmus $\overset{(e_0 p^{\nu_0})}{l}$ verwendet werden. Man erhält also das folgende wichtige Ergebnis, das die Frage der Darstellung der Logarithmen für sämtliche Körper vollständig und naturgemäß löst:

Das Fundamentalsystem für die Logarithmen eines Körpers, der die primitiven $p^{\nu e}$-ten Einheitswurzeln enthält, besteht aus ε irregulären Loga-

rithmen von höchster Irregularitätsordnung und $\lambda - \varepsilon$ regulären Logarithmen. Es hat also die Form

$$(26) \qquad \overline{L}_0, \quad \overline{L}_1, \ldots \overline{L}_{\varepsilon-1}; \quad l_{\varepsilon+1}, \cdots l_\lambda$$

und zerfällt in e Systeme von je f Elementen, deren Ordnungszahlen modulo e kongruent sind.

Man kann daher die auf S. 229 zunächst für die regulären Logarithmen eingeführte Klasseneinteilung, nach der alle und nur die in dieselbe Klasse gehören, deren Logarithmenordnungen modulo e kongruent sind, auch auf die irregulären Logarithmen ausdehnen. Man erkennt dann aus der obigen Betrachtung der Irregularitätsordnungen, daß $\lambda - \varepsilon$ dieser Klassen keine irregulären Logarithmen von höchster Irregularitätsordnung enthalten; sie sollen kurz als reguläre Klassen bezeichnet werden. Ihre niedrigste Ordnungszahl ist eine reduzierte Ordnung ϱ_h, und die Anfangsglieder aller ihrer Elemente lassen sich durch die f Fundamentallogarithmen dieser Ordnung darstellen. Die ε übrigen Klassen dagegen enthalten irreguläre Logarithmen von höchster Irregularitätsordnung von der Form $\varrho_h - ne$; die Anfangsglieder aller Elemente einer solchen irregulären Klasse lassen sich durch einen zu dieser Ordnungszahl gehörigen irregulären Fundamentallogarithmus und $f-1$ reguläre Fundamentallogarithmen der Ordnung ϱ_h darstellen. Die Klasse $K^{(e_0)}$, deren Logarithmenordnungen zu $\varrho_{e_0} = p^{\nu_0} e_0 - \nu_0 e$ kongruent sind, gehört entweder zu den regulären Klassen; dann sind die Anfangsglieder ihrer Elemente durch $f-1$ reguläre Fundamentallogarithmen der Ordnung ϱ_{e_0} und den Ersatzlogarithmus der Ordnung $\varrho^{(0)} = \varrho_{e_0 p^{\nu_0}} = e_0 p^{\nu_0}$ darstellbar; oder sie gehört zu den irregulären Klassen, dann sind sie durch $f-1$ reguläre Fundamentallogarithmen der Ordnung ϱ_{e_0} und einen irregulären Fundamentallogarithmus der höchsten Irregularitätsordnung $\varrho^{(0)} - n^{(0)} e$ darstellbar. Als $(e+1)$-te Klasse tritt die Klasse K_0 hinzu, welche die Ordnungszahl $+\infty$ besitzt und alle Logarithmen vom Werte 0 umfaßt, zu denen die p^{ν_ε}-ten Einheitswurzeln als Numeri gehören.

Wendet man das allgemeine Ergebnis von S. 235 auf den wichtigen Spezialfall an, daß in $K(\mathfrak{p})$ die höchstmöglichen irregulären Einheitswurzeln existieren, setzt also $\nu_\varepsilon = \nu_0$, so erkennt man, daß keine irregulären Logarithmen von höchster Irregularitätsordnung existieren, so daß das Fundamentalsystem aus λ regulären Logarithmen $l_1, l_2, \cdots, l^{(e_0 p^{\nu_0})}$ besteht.

Enthält andrerseits $K(\mathfrak{p})$ überhaupt keine irregulären Einheitswurzeln, liegt also ein regulärer Körper vor, so besteht das Fundamentalsystem aus den λ regulären Fundamentallogarithmen $l_1, \ldots, l_\lambda$, unter denen kein Ersatzlogarithmus vorkommt.

§ 2. Berechnung von Ordnungszahl und Index des Regulators.

Auf Grund der gefundenen Gesetzmäßigkeiten kann man nun die Berechnung von Ordnungszahl und Index des Regulators $R = |l_1 \ldots l_\lambda|$ durchführen. Aus denjenigen Spalten, die aus irregulären Fundamentallogarithmen bzw. aus den Ersatzlogarithmen bestehen, lassen sich Potenzen von p als Faktor vor die Deter-

minante ziehen. Enthält zunächst das Fundamentalsystem für die Logarithmen von $K(\mathfrak{p})$ den Ersatzlogarithmus, so entsteht aus der zugehörigen Determinantenspalte

$$\overset{(e_0 p^{\nu_0})}{l_{kl}} = \overset{(l)\varrho_{e_0}+\nu_0 e}{\pi_k} \quad \overset{(l)g_0 p^{\nu_0}}{w} \quad \overset{(l)}{\xi_0} + \cdots \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, e \\ l = 1, \ldots, f \end{pmatrix}$$

durch Absonderung des Faktors

$$p^{\nu_0} = (-1)^{\nu_0} \overset{(l)\nu_0 e}{\pi_k} \quad \overset{(l)\nu_0 g}{w} + \cdots$$

der Wert

$$(-1)^{\nu_0} \overset{(l)\varrho_{e_0}}{\pi_k} \quad \overset{(l)g_0 p^{\nu_0}-\nu_0 g}{w} \quad \overset{(l)}{\xi_0} + \cdots;$$

also läßt sich aus R der Faktor p^{ν_0} absondern.

Aus jeder irregulären Spalte von der Form

$$\overset{(l)\varrho_{h_i}-n_i e}{\pi_k} \quad \overset{(l)}{\overline{w}_i} + \cdots \qquad \begin{pmatrix} l = 1, \ldots, f \\ k = 1, \ldots, e \\ i = 0, \ldots, \varepsilon - 1 \end{pmatrix}$$

läßt sich die Potenz

$$p^{-n_i} = \overset{(l)-n_i e}{\pi_k} \quad \overset{(l)-n_i q}{w} + \cdots$$

absondern, wodurch die Spalte die Form erhält

$$\overset{(l)\varrho_{h_i}}{\pi_k} \quad \overset{(l)}{\overline{w}_i} \quad \overset{(l)\,n_i q}{w} + \cdots.$$

Nach S. 226 kann man dafür setzen

$$\overset{(l)\varrho_{h_i}}{\pi_k} (c_1 \overset{(l)}{w_1} + c_2 \overset{(l)}{w_2} + \cdots + c_f \overset{(l)}{w_f}) + \cdots,$$

wo die rationale Zahl c_1 von Null verschieden angenommen werden kann. Durch Subtraktion der mit den Koeffizienten $c_2, \ldots, c_f$ multiplizierten regulären Spalten der Ordnung ϱ_{h_i} reduziert sie sich auf das Glied $\overset{(l)\varrho_{h_i}}{\pi_k} c_1 \overset{(l)}{w_1} + \cdots$, also tritt der Faktor $c_1 p^{-n_i}$ vor die Determinante. Aus allen irregulären Spalten zusammen kann also der Faktor $C \,.\, p^{-\sum_{i=0}^{\varepsilon-1} n_i}$, wo C eine ganze rationale, nicht durch p teilbare Zahl bedeutet, abgesondert werden. Setzt man für die Exponenten n_i die auf S. 233 eingeführten Differenzen $\nu_i - \nu_{i+1}$ ein, so erkennt man, daß

$$\sum_0^{\varepsilon-1 i} n_i = (\nu_0 - \nu_1) + (\nu_1 - \nu_2) + \cdots + (\nu_0 - \nu_\varepsilon)\nu = \nu_0 - \nu_\varepsilon$$

ist. Also läßt sich insgesamt aus R der Faktor

$$C \,.\, p^{\nu_0 - (\nu_0 - \nu_\varepsilon)} = C \,.\, p^{\nu_\varepsilon} \tag{27}$$

abspalten.

Enthält dagegen das Fundamentalsystem den Ersatzlogarithmus $\overset{(e_0 p^{\nu_0})}{l}$ nicht, sondern tritt statt seiner der irreguläre Logarithmus

$$\overline{L}_{\varepsilon-1} = \pi^{\varrho^{(0)} - n^{(0)} e} \overline{\xi} + \cdots = \pi^{\varrho^{(0)} - (\nu_{\varepsilon-1} - \nu_\varepsilon)e} \overline{\xi} + \cdots = \pi^{\varrho_{e_0} + \nu_0 e - \overset{(0)}{n} e} \overline{\xi} + \cdots$$

auf, so läßt sich aus der zugehörigen Regulatorspalte die Potenz

$$p^{\nu_0 - n^{(0)}} = p^{\nu_0 - \nu_{\varepsilon-1} + \nu_\varepsilon}$$

absondern. Aus den übrigen $\varepsilon - 1$ irregulären Spalten läßt sich diesmal

$$p^{-\sum_{i=0}^{\varepsilon-2} n_i} = p^{-(\nu_0 - \nu_{\varepsilon-1})}$$

abspalten; also tritt in diesem Falle ebenfalls insgesamt der Faktor

$$C \,.\, p^{\nu_0 - \nu_{\varepsilon-1} + \nu_\varepsilon - \nu_0 + \nu_{\varepsilon-1}} = C p^{\nu_\varepsilon}$$

vor den Regulator.

Ist kein Ersatzlogarithmus vorhanden, so bilden die Koeffizienten von je f Spalten der nach Abspaltung von $C \,.\, p^{\nu_\varepsilon}$ entstehenden Determinante R_0 eine beliebige Basis modulo $\mathfrak{p}$; also kann von vornherein angenommen werden, daß alle e Gruppen von je f Spalten dieselben Anfangskoeffizienten besitzen. Ist dagegen der Ersatzlogarithmus $\overset{(e_0 p^{\nu_0})}{l}$ vorhanden, so enthält R_0 das Element $p^{-\nu_0} \overset{(e_0 p^{\nu_0})}{l}$ mit dem Anfangskoeffizienten

$$(-1)^{\nu_0} \overset{(l)}{w}{}^{g_0 p^{\nu_0} - \nu_0 g} \overset{(l)}{\xi}_0 .$$

Dieser ist nach S. 229 so gewählt, daß er mit den Anfangskoeffizienten

$$\overset{(l)}{\xi}_1, \quad \overset{(l)}{\xi}_2, \ldots, \overset{(l)}{\xi}_{f-1}$$

der $f-1$ Fundamentallogarithmen der Ordnung ϱ_{e_0} eine Basis modulo $\mathfrak{p}$ bildet, also gilt das Gleiche von den f Zahlen

$$(28) \quad \left(\overset{(l)}{\xi}_1, \quad \overset{(l)}{\xi}_2, \ldots \overset{(l)}{\xi}_{f-1}; \quad (-1)^{\nu_0} \overset{(l)}{w}{}^{g_0 p^{\nu_0} - \nu_0 g} \overset{(l)}{\xi}_0\right) = \left(\overset{(l)}{\xi}_1 \ldots \overset{(l)}{\xi}_{f-1}; \; \overline{\overset{(l)}{\xi}}_f\right) \; (l = 1, 2, \ldots, f)$$

in einem der konjugierten Körper.

Da die Basissysteme für die übrigen Gruppen von je f Spalten ganz beliebig sind, kann man wieder von vornherein annehmen, daß alle e Gruppen von je f Spalten dieselbe Basis (28) als Anfangskoeffizienten besitzen; der Gleichförmigkeit halber soll die gemeinsame Basis auch in diesem Falle mit $(\overset{(l)}{w}_1 \ldots \overset{(l)}{w}_f)$ bezeichnet werden.

Folglich hat die nach Abspaltung von $C p^{\nu_\varepsilon}$ übrigbleibende Determinante aus den Anfangsgliedern der Fundamentallogarithmen und ihrer Konjugierten, die als der „*reduzierte Regulator*“ $\overline{R}_0$ bezeichnet werden soll, folgende Form:

$$(29) \quad \overline{R}_0 = \begin{vmatrix}
\overset{(0)}{\pi}{}_1^{\varrho_1} w_1 \ldots \overset{(0)}{\pi}{}_1^{\varrho_1} w_f ; \; \overset{(0)}{\pi}{}_1^{\varrho_2} w_1 \ldots \overset{(0)}{\pi}{}_1^{\varrho_2} w_f ; \ldots ; \overset{(0)}{\pi}{}_1^{\varrho_e} w_1 \ldots \overset{(0)}{\pi}{}_1^{\varrho_e} w_f \\
\ldots \\
\overset{(0)}{\pi}{}_e^{\varrho_1} w_1 \ldots \overset{(0)}{\pi}{}_e^{\varrho_1} w_f ; \; \overset{(0)}{\pi}{}_e^{\varrho_2} w_1 \ldots \overset{(0)}{\pi}{}_e^{\varrho_2} w_f ; \ldots ; \overset{(0)}{\pi}{}_e^{\varrho_e} w_1 \ldots \overset{(0)}{\pi}{}_e^{\varrho_e} w_f \\
\overset{(1)}{\pi}{}_1^{\varrho_1} w_1^p \ldots \overset{(1)}{\pi}{}_1^{\varrho_1} w_f^p ; \; \overset{(1)}{\pi}{}_1^{\varrho_2} w_1^p \ldots \overset{(1)}{\pi}{}_1^{\varrho_2} w_f^p ; \ldots ; \overset{(1)}{\pi}{}_1^{\varrho_e} w_1^p \ldots \overset{(1)}{\pi}{}_1^{\varrho_e} w_f^p \\
\ldots \\
\overset{(1)}{\pi}{}_e^{\varrho_1} w_1^p \ldots \overset{(1)}{\pi}{}_e^{\varrho_1} w_f^p ; \; \overset{(1)}{\pi}{}_e^{\varrho_2} w_1^p \ldots \overset{(1)}{\pi}{}_e^{\varrho_2} w_f^p ; \ldots ; \overset{(1)}{\pi}{}_e^{\varrho_e} w_1^p \ldots \overset{(1)}{\pi}{}_e^{\varrho_e} w_f^p \\
\ldots \\
\ldots \\
\overset{(f-1)}{\pi}{}_1^{\varrho_1} w_1^{p^{f-1}} \ldots \overset{(f-1)}{\pi}{}_1^{\varrho_1} w_f^{p^{f-1}} ; \; \overset{(f-1)}{\pi}{}_1^{\varrho_2} w_1^{p^{f-1}} \ldots \overset{(f-1)}{\pi}{}_1^{\varrho_2} w_f^{p^{f-1}} ; \ldots ; \overset{(f-1)}{\pi}{}_1^{\varrho_e} w_1^{p^{f-1}} \ldots \overset{(f-1)}{\pi}{}_1^{\varrho_e} w_f^{p^{f-1}} \\
\ldots \\
\overset{(f-1)}{\pi}{}_e^{\varrho_1} w_1^{p^{f-1}} \ldots \overset{(f-1)}{\pi}{}_e^{\varrho_1} w_f^{p^{f-1}} ; \; \overset{(f-1)}{\pi}{}_e^{\varrho_2} w_1^{p^{f-1}} \ldots \overset{(f-1)}{\pi}{}_e^{\varrho_2} w_f^{p^{f-1}} ; \ldots ; \overset{(f-1)}{\pi}{}_e^{\varrho_e} w_1^{p^{f-1}} \ldots \overset{(f-1)}{\pi}{}_e^{\varrho_e} w_f^{p^{f-1}}
\end{vmatrix}$$

oder in abgekürzter Schreibweise

$$\overline{R}_0 = \left| \overset{(i)}{\pi}{}_k^{\varrho_m} w_l^{p^i} \right| \qquad \begin{pmatrix} m, k = 1, 2, \ldots, e \\ i = 0, 1, \ldots, f-1 \\ l = 1, 2, \ldots, f \end{pmatrix}, \tag{29 a}$$

denn die Primzahl π besitzt f Zyklen von je e Konjugierten

$$\overset{(0)}{\pi}_1, \ldots, \overset{(0)}{\pi}_e; \quad \overset{(1)}{\pi}_1, \ldots, \overset{(1)}{\pi}_e; \quad \ldots; \quad \overset{(f-1)}{\pi}_1, \ldots, \overset{(f-1)}{\pi}_e,$$

während jedes Element w_l die f Konjugierten

$$\left(w_l,\ w_l^p,\ w_l^{p^2} \ldots,\ w_l^{p^{f-1}}\right) = \left(\overset{(0)}{w}_l,\ \overset{(1)}{w}_l,\ \overset{(2)}{w}_l \ldots\ \overset{(f-1)}{w}_l\right)$$

besitzt. Die Berechnung von $\overline{R}_0$ läßt sich nach einer Methode durchführen, die der von Herrn *Hensel* in seiner „Theorie der algebraischen Zahlen“[1]) zur Auswertung der Determinante

$$\Delta(\eta, \pi) = \left| \overset{(i)}{\eta}{}^l \overset{(i)}{\pi}{}_k^m \right| \qquad \begin{pmatrix} i, l = 0, 1, \ldots, f-1 \\ m = 0, 1, \ldots, e-1 \\ k = 1, 2, \ldots, e \end{pmatrix}$$

angewendeten genau entspricht. Bildet man nämlich aus den e ersten Zeilen von $\overline{R}_0$ alle Unterdeterminanten e-ter Ordnung, so sind nur diejenigen von Null verschieden, in denen die Exponenten ϱ_m sämtlich verschieden sind, da in den übrigen sich zwei Vertikalreihen nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, durch dessen Abspaltung eine Determinante mit 2 gleichen Kolonnen entsteht. Alle nicht verschwindenden Unterdeterminanten e-ter Ordnung aus den e ersten Zeilen

$$\begin{vmatrix} \overset{(0)}{\pi}_1^{\varrho_1} w_1' & \ldots & \overset{(0)}{\pi}_1^{\varrho_e} w_f' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{(0)}{\pi}_1^{\varrho_1} w_1' & \ldots & \overset{(0)}{\pi}_e^{\varrho_e} w_f' \end{vmatrix}, \tag{30}$$

wo $(w_1' \ldots w_f')$ eine beliebige Kombination der Elemente $(w_1 \ldots w_f)$ mit Wiederholungen zur e-ten Klasse bedeutet, sind durch die Determinante

$$\Delta(\overset{(0)}{\pi}) = \begin{vmatrix} \overset{(0)}{\pi}_1^{\varrho_1} & \ldots & \overset{(0)}{\pi}_1^{\varrho_e} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{(0)}{\pi}_e^{\varrho_1} & \ldots & \overset{(0)}{\pi}_e^{\varrho_e} \end{vmatrix} = \left| \overset{(0)}{\pi}_k^{\varrho_m} \right| \quad (k, m = 1, \ldots, e) \tag{31}$$

teilbar; also gilt nach dem *Laplace*schen Determinantensatz das gleiche für die ganze Determinante $\overline{R}_0$. Wendet man auf die andern Gruppen von je e Zeilen dieselbe Überlegung an, so erhält man für $\overline{R}_0$ die Darstellung

$$\overline{R}_0 = G(\overset{(i)}{w}) \left| \overset{(0)}{\pi}_k^{\varrho_m} \right| \cdot \left| \overset{(1)}{\pi}_k^{\varrho_m} \right| \ldots \left| \overset{(f-1)}{\pi}_k^{\varrho_m} \right| \qquad (k, m = 1, \ldots, e). \tag{32}$$

Darin hängt $G(\overset{(i)}{w})$ nur noch von

$$\overset{(i)}{w}_1, \ldots, \overset{(i)}{w}_f$$

ab, wie die Vergleichung des Grades in bezug auf irgendein Element $\overset{(i)}{\pi}_k$ lehrt. $\overline{R}_0$ enthält jedes solche Element höchstens in der ϱ_e-ten Potenz; in den rechts

[1]) a. a. O. Kap. IX, § 3, S. 222 ff.

stehenden Determinanten tritt jedes $\overset{(i)}{\pi}_k$ genau in der ϱ_e-ten Potenz auf; also kann $G(\overset{(i)}{w})$ keine der Zahlen $\overset{(i)}{\pi}_k$ mehr enthalten. Zur Bestimmung von $G(\overset{(i)}{w})$ können daher die f Zyklen $(\overset{(i)}{\pi}_1 \ldots \overset{(i)}{\pi}_e)$ einander gleichgesetzt werden; sie mögen sämtlich gleich dem ersten Zyklus $(\overset{(0)}{\pi}_1 \ldots \overset{(0)}{\pi}_e)$ angenommen werden. Dann kann man nach einem Satz von *Kronecker* [1]) für diese vereinfachte Determinante die Produktdarstellung geben

$$\overline{\overline{R}}_0 = \varepsilon \left| \overset{(0)}{\pi}{}_k^{\varrho_m} \right|^f \cdot \left| \overset{(i)}{w}_1 \ldots \overset{(i)}{w}_f \right|^e \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, f-1 \\ k, m = 1, 2, \ldots, e \end{pmatrix}; \tag{33}$$

also ist

$$G(\overset{(i)}{w}) = \varepsilon \cdot \left| \overset{(i)}{w}_1 \ldots \overset{(i)}{w}_f \right|^e$$

und daher

$$\overline{R}_0 = \varepsilon \left| \overset{(i)}{w}_1 \ldots \overset{(i)}{w}_f \right|^e \prod_{i=0}^{f-1} \left| \overset{(i)}{\pi}{}_k^{\varrho_m} \right|. \tag{34}$$

Ordnet man die Horizontalreihen von $\overline{R}_0$ so um, daß zuerst alle f Zeilen hingeschrieben werden, die π_1 enthalten, sodann alle, die π_2 enthalten, usf., wobei sich höchstens das Vorzeichen von $\overline{R}_0$ ändert, so ist das Diagonalglied der umgeordneten Determinante gleich dem Produkt der Diagonalglieder der rechts stehenden Determinanten; also hat ε den Wert ± 1. Für das Quadrat des reduzierten Regulators, das als symmetrische Funktion der Konjugierten eine rationale p-adische Zahl ist, folgt daraus

$$\overline{R}_0^2 = \left| \overset{(i)}{w}_1 \ldots \overset{(i)}{w}_f \right|^{2e} \cdot \prod_{i=0}^{f-1} \left| \overset{(i)}{\pi}{}_k^{\varrho_m} \right|^2. \tag{34 a}$$

Die Determinanten $\left| \overset{(i)}{\pi}{}_k^{\varrho_m} \right|$ unterscheiden sich nun von der *Cauchy*schen Potenzdeterminante

$$C_k^{(i)} = \left| 1 \; \overset{(i)}{\pi}_k \; \overset{(i)}{\pi}{}_k^2 \ldots \overset{(i)}{\pi}{}_k^{e-1} \right| \tag{35}$$

nur um einen genau durch p teilbaren Faktor.

Ist nämlich zunächst e nicht durch p teilbar, so kann die Primzahl $\overset{(0)}{\pi}$ stets so gewählt werden, daß sie nebst ihren Konjugierten der reinen Gleichung e-ten Grades [2])

$$x^e - p\,\eta_0 = 0$$

genügt, wo η_0 eine $(p^f - 1)$-te Einheitwurzel des betreffenden Körpers darstellt. In der früher benutzten Entwicklung von p (vgl. § 1, S. 183 der ersten Arbeit)

$$p = \overset{(0)}{\pi}{}_k^e w^q \zeta_p$$

ist daher die Einseinheit $\zeta_p = 1$ zu setzen, so daß man hat

$$\overset{(0)}{\pi}{}_k^e = p\, w^{-q} \qquad (k = 1, \ldots, e). \tag{36}$$

Reduziert man also die Ordnungszahlen ϱ_m auf ihre kleinsten positiven Reste modulo e

$$\varrho_m = a_m + e b_m \qquad (0 \leqq a_m < e),$$

---

[1]) Vgl. *Hensel,* Acta mathematica, t. 14, p. 317—319: „Darstellung der Determinante eines Systems, welches aus zwei andern komponiert ist".

[2]) Vgl. *Hensel,* Theorie der algebraischen Zahlen, Kap. VIII, § 6, S. 201.

so kann man wegen

$$\overset{(0)}{\pi}{}_k^{\varrho_m} = \overset{(0)}{\pi}{}_k^{a_m + e b_m} = \overset{(0)}{\pi}{}_k^{a_m} p^{b_m} w^{-q b_m}$$

aus jeder Spalte von $\Delta(\overset{(0)}{\pi})$ den Faktor $p^{b_m} w^{-q b_m}$ absondern, aus der ganzen Determinante also

$$p^{\Sigma b_m} w^{-q \Sigma b_m} = p\, w^{-q},$$

denn Σb_m hat den einfachen Wert 1. Um das zu zeigen, bilde ich die über alle reduzierten Ordnungen erstreckte Summe

$$\sum_1^e{}^m \varrho_m = \Sigma a_m + e \Sigma b_m = \Sigma p^\varkappa k - e \Sigma \varkappa.$$

Also ist

$$e \Sigma (\varkappa + b_m) = \Sigma (p^\varkappa k - a_m).$$

Da die Zahlen a_m die Werte $0, 1, \ldots, e-1$ durchlaufen, während die Zahlen $p^\varkappa k$ die Werte $r+1, \ldots, r+e$ annehmen, so kann man die rechts stehenden Differenzen so zusammenfassen, daß $r+1$ davon den Wert e erhalten, während die übrigen verschwinden; also ist

$$\Sigma (\varkappa + b_m) = r + 1.$$

Andererseits hat $\Sigma \varkappa$ den einfachen Wert r, denn zu jeder Zahl $p^\varkappa k$ gehören genau $\varkappa$ durch p teilbare Zahlen unterhalb $r+e$; also ist $\Sigma \varkappa$ gleich der Anzahl aller durch p teilbaren Zahlen unterhalb $r+e$, also gleich $\left[\frac{r+e}{p}\right] = r$, da die zu verschiedenen Werten von k gehörigen Zahlen von der Form $p^n k$ sämtlich verschieden sind. Also ist in der Tat $\Sigma b_m = 1$.

Die nach Abspaltung des Faktors $p w^{-q} = \pm n(\overset{(0)}{\pi_1})$ aus $\Delta(\overset{(0)}{\pi})$ übrigbleibende Determinante $\left|\overset{(0)}{\pi}{}_k^{a_m}\right|$ stimmt bis aufs Vorzeichen mit der *Cauchy*schen Determinante (35) überein, da $(a_1, \ldots, a_e)$ eine Permutation der Zahlen $(0, 1, \ldots, e-1)$ darstellt. $C_k^{(0)2}$ ist nun gleich der Diskriminante der Gleichung e-ten Grades

$$\Psi_0(x) = x^e - p\, w^{-q} = 0, \tag{37}$$

der $\overset{(0)}{\pi_1}$ nebst seinen Konjugierten genügt. Es ist daher

$$C_k^{(0)2} = D(\overset{(0)}{\pi}) = (-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} n\left[\Psi_0'(\overset{(0)}{\pi_1})\right] = (-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} e^e n(\overset{(0)}{\pi_1})^{e-1}. \tag{38}$$

Wegen $\Delta(\overset{(0)}{\pi})^2 = n(\overset{(0)}{\pi_1})^2 \cdot \left|\overset{(0)}{\pi}{}_k^{a_m}\right|^2$ ergibt sich daraus

$$\Delta(\overset{(0)}{\pi})^2 = (-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} e^e n(\overset{(0)}{\pi})^{e+1}.$$

Entsprechendes gilt für die übrigen Determinanten $\Delta(\overset{(1)}{\pi}), \ldots, \Delta(\overset{(f-1)}{\pi})$. Einsetzen in Formel (34a) liefert für das Anfangsglied des Regulatorquadrats den Wert

$$\overline{R}_0^2 = \left|\overset{(i)}{w}_1 \ldots \overset{(i)}{w}_f\right|^{2e} \cdot (-1)^{\frac{\lambda(e-1)}{2}} e^\lambda N(\pi)^{e+1}, \tag{39}$$

[1]) Vgl. *Hensel*, Theorie der algebraischen Zahlen, Kap. IX, § 2, S. 218.

wo $N(\pi)$ die volle, über alle λ konjugierten Primzahlen erstreckte Norm bedeutet. Da $N(\pi)$ genau durch p^f teilbar ist, während alle übrigen Faktoren $\mathfrak{p}$ nicht enthalten, so hat die Ordnungszahl des Regulatorquadrats den Wert

$$2\,\mathsf{P}_R = f(e+1). \tag{40}$$

Der Regulatorindex hängt von der Wahl der Basis $(\overset{(i)}{w}_1 \ldots \overset{(i)}{w}_f)$ modulo $\mathfrak{p}$ ab. Da sich aber jede Basis durch die spezielle

$$\left(1\,\overset{(i)}{w} \ldots \overset{(i)}{w}^{f-1}\right)$$

aus den Potenzen einer primitiven (p^f-1)-ten Einheitswurzel, die ja ein primitives Element f-ten Grades für den betreffenden Körper darstellt, homogen und linear ausdrücken läßt, so besteht die Determinantenrelation

$$\left|\overset{(i)}{w}_l\right| = |c_{il}| \cdot \left|1\,\overset{(i)}{w} \ldots \overset{(i)}{w}^{f-1}\right| \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, f-1 \\ l = 1, 2, \ldots, f \end{pmatrix},$$

worin die Substitutionsdeterminante $|c_{il}|$ eine rationale, nicht durch p teilbare Zahl darstellt, also ist der Index des Regulatorquadrats bis auf den Index einer rationalen Quadratzahl, also bis auf ein Vielfaches von $2\dfrac{p^f-1}{p-1}$ bestimmt. Aus (39) folgt für ihn der Wert

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Ind}\,R = {} & e\,\mathrm{Ind}\,D(w) + \lambda\,\mathrm{Ind}\,e + (e+1)\,\mathrm{Ind}\,N(\pi) \\ & + \lambda\frac{e-1}{2}\,\mathrm{Ind}\,(-1) + 2\,\mathrm{Ind}\,|c_{il}|\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Darin bedeutet $D(w)$ die Diskriminante der irreduktibeln Gleichung f-ten Grades, der eine primitive (p^f-1)-te Einheitswurzel nebst ihren Konjugierten genügt, denn diese ist gleich dem Quadrat der Determinante $\left|1\,\overset{(i)}{w} \ldots \overset{(i)}{w}^{f-1}\right|$. Der Index der Norm von π hat den Wert

$$\mathrm{Ind}\,N(\pi) = -q\,\frac{p^f-1}{p-1} + f(e-1)\,\mathrm{Ind}\,(-1), \tag{41a}$$

da die Partialnormen den Werten

$$(-1)^{e-1} p\, w^{-q},\ (-1)^{e-1} p\,(w^p)^{-q},\ \ldots,\ (-1)^{e-1} p\,(w^{p^{f-1}})^{-q}$$

modulo $\mathfrak{p}$ kongruent sind. Der Index von -1 hat in allen Körpern den Wert $\dfrac{p^f-1}{2}$. Ind $|c_{il}|$ kann in allen den Körpern zu Null gemacht werden, für die e nicht durch $p-1$ teilbar ist, denn dann kann jene einfachste Basis $(1\,\overset{(i)}{w} \ldots \overset{(i)}{w}^{f-1})$ zur Bildung der Fundamentallogarithmen benutzt werden. Ist dagegen $e = e^{(0)}(p-1)$, so muß die Basis die Form $(\xi_1, \ldots, \xi_f)$ besitzen, wo $\xi_i = \varphi(x_i) \equiv x_i - x_i w^g \pmod{\mathfrak{p}}$ ist, also tritt in (41) Ind $|c_{il}|$ wirklich auf.

Ich betrachte jetzt noch den Fall, daß e durch p teilbar ist, also die Form

$$e = p^s e_1 \tag{42}$$

besitzt. Auch dann läßt sich zeigen, daß sich die Determinante $\Delta(\overset{(i)}{\pi})$ von der *Cauchy*schen Potenzdeterminante $C_k^{(0)}$ nur um einen genau durch p teilbaren Faktor unterscheidet. Mit Hilfe der irreduktibeln *Eisenstein*schen Gleichung:

$$(43)\qquad \overline{\Psi}_0(x) = x^e + p\,c_{e-1}x^{e-1} + p\,c_{e-2}x^{e-2} + \cdots + p\,c_0 = 0 \quad [1]),$$

der $\overset{(0)}{\pi}_k$ in diesem Falle genügt, läßt sich nämlich jede Potenz $\overset{(0)}{\pi}_k^{\varrho_m} = \overset{(0)}{\pi}_k^{a_m + e\,b_m}$ in der Form

$$\overset{(0)}{\pi}_k^{\varrho_m} = D_0 + D_1\overset{(0)}{\pi}_k + D_2\overset{(0)}{\pi}_k^2 + \cdots + D_{e-1}\overset{(0)}{\pi}_k^{e-1}$$

darstellen. Darin ist der Koeffizient von $\overset{(0)}{\pi}_k^{a_m}$ genau durch p^{b_m} teilbar. Es ist nämlich nach Gleichung (43)

$$\begin{aligned}\overset{(0)}{\pi}_k^{\varrho_m} = \overset{(0)}{\pi}_k^{a_m}\left(\overset{(0)}{\pi}_k^{e}\right)^{b_m} &= \overset{(0)}{\pi}_k^{a_m}(-p)^{b_m}\left(c_0 + c_1\overset{(0)}{\pi}_k + \cdots + c_{e-1}\overset{(0)}{\pi}_k^{e-1}\right)^{b_m}\\ &= \overset{(0)}{\pi}_k^{a_m}(-p)^{b_m}(c_0^{b_m} + p\,\bar{c}_0) + \cdots,\end{aligned}$$

wo die Punkte Glieder höherer Ordnung andeuten.

Entwickelt man nämlich die Potenz $(c_0 + c_1\pi + \cdots + c_{e-1}\pi^{e-1})^{b_m}$ nach Potenzen von π und bringt den erhaltenen Ausdruck $A_0 + A_1\pi + \cdots + A_n\pi^n$ mit Hilfe von Gleichung (43) auf die reduzierte Form $C_0 + C_1\pi + \cdots + C_{e-1}\pi^{e-1}$, so erkennt man, daß das von π freie Glied die Form hat

$$C_0 = c_0^{b_m} - p\,c_0A_e + p^2c_0^2A_{2e} \mp \ldots = c_0^{b_m} + p\,\bar{c}_0,$$

also hat das niedrigste Glied der Entwicklung in der Tat den Einheitskoeffizienten $c_0^{b_m} + p\,\bar{c}_0$. Multipliziert man daher jede Spalte $\overset{(0)}{\pi}_k^{a_m}$ der *Cauchy*schen Potenzdeterminante $C_k^{(0)}$ mit dem Faktor $(-p)^{b_m}(c_0^{b_m} + p\,\bar{c}_0)$ und addiert dazu die mit den Koeffizienten $D_0, D_1, \ldots, D_{a_m-1}, D_{a_m+1}, \ldots, D_{e-1}$ multiplizierten übrigen Spalten, so geht $C_k^{(0)2}$ in $\Delta(\overset{(0)}{\pi})^2$ über. Also besteht zwischen beiden Determinanten die Relation

$$\Delta(\overset{(0)}{\pi})^2 = (-p)^{2\Sigma b_m}\,\Pi(c_0^{b_m} + p\,\bar{c}_{0m})^2\,C_k^{(0)2}$$

oder die Kongruenz

$$(44)\qquad \begin{aligned}\Delta(\overset{(0)}{\pi})^2 &\equiv \left|\overset{(0)}{\pi}_k^{\varrho_m}\right|^2 \equiv p^2c_0^2\left|1\;\overset{(0)}{\pi}_k \ldots \overset{(0)}{\pi}_k^{e-1}\right|^2\\ &\equiv n(\overset{(0)}{\pi})^2\cdot\left|1\;\overset{(0)}{\pi}_k \ldots \overset{(0)}{\pi}_k^{e-1}\right|^2 \pmod{p^3}.\end{aligned}$$

Für die Gleichungsdiskriminante $D(\overset{(0)}{\pi})$ von Gleichung (43), die gleich $C_k^{(0)2}$ ist, gilt auch in diesem Falle die Darstellung (38) von Seite 241:

$$C_k^{(0)2} = D(\overset{(0)}{\pi}) = (-1)^{\frac{e(e-1)}{2}}\,n\left(\overline{\Psi}_0'(\overset{(0)}{\pi}_1)\right).$$

Die Norm der Ableitung von (43) hat aber in diesem Falle den Wert

$$(45)\qquad n\left(\overline{\Psi}_0'(\overset{(0)}{\pi}_1)\right) = \overset{(0)}{c}{}^{e}_{\bar{e}-1}\,n(\overset{(0)}{\pi}_1)^{\bar{e}-1} = \overset{(0)}{c}{}^{e}_{\bar{e}-1}\left[(-1)^e\,p\,\overset{(0)}{c}_0\right]^{e-1}\;[2]),$$

wo $\bar{e}$ die um 1 vermehrte Ordnungszahl von $\overline{\Psi}_0'(\overset{(0)}{\pi})$, die sogenannte *Verzweigungsordnung* von $\mathfrak{p}$ bedeutet. Sie ist für jede in e enthaltene Primzahl größer als e und liegt zwischen den Grenzen $e+1$ und $(s+1)e$. Für $\left|\overset{(0)}{\pi}_k^{\varrho_m}\right|^2$ folgt daher aus (44) und (45) der Wert

---

[1]) Vgl. *Hensel*, Theorie der algebraischen Zahlen, Kap. VIII, § 5, S. 196.

[2]) Vgl. *Hensel*, Theorie der algebraischen Zahlen, Kap. IX, § 2, S. 219.

$$\left|\overset{(0)}{\pi}{}_k^{\varrho_m}\right|^2 \equiv (-1)^{e\frac{e-1}{2}} c_{\bar{e}-1}^{e}\, n(\overset{(0)}{\pi})^{\bar{e}+1} \pmod{p^3}.$$

Führt man für die konjugierten Determiannten $\left|\overset{(i)}{\pi}{}_k^{\varrho_m}\right|$ die entsprechenden Überlegungen durch und setzt die erhaltenen Werte in die Formel (34a) ein, so erhält man in diesem Falle für das Anfangsglied des reduzierten Regulators die Darstellung

$$\overline{R}_0^2 = \left|\overset{(i)}{w}_1 \ldots \overset{(i)}{w}_f\right|^{2e} (-1)^{\lambda\frac{e-1}{2}} n(c_{\bar{e}-1})^e N(\pi)^{\bar{e}+1}, \tag{46}$$

in genauer Entsprechung zu Formel (39), wenn man $\bar{e}$ durch e ersetzt und berücksichtigt, daß der Anfangskoeffizient $c_{\bar{e}-1}$ von $\psi_0'(\pi)$ den Wert e besitzt, falls e nicht durch p teilbar ist.

Für die reduzierte Regulatorordnung ergibt sich in diesem Falle der Wert

$$2\mathfrak{P}_{\overline{R}} = f(\bar{e}+1). \tag{47}$$

Fügt man den abgespaltenen Faktor $p^{2\nu_e}$ wieder hinzu, so erhält man für die Regulatorordnung selbst die einfache Gleichung

$$2\mathfrak{P}_R = f(\bar{e}+1) + 2\nu_e. \tag{48}$$

Für den Regulatorindex folgt

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Ind}\,\overline{R} = {} & e\,\mathrm{Ind}\,D(w) + e\,\mathrm{Ind}\,n(c_{\bar{e}-1}) + (\bar{e}+1)\,\mathrm{Ind}\,N(\pi) \\ & + \frac{\lambda(e-1)}{2}\,\mathrm{Ind}\,(-1) + 2\,\mathrm{Ind}\,|c_{il}| + 2\,\mathrm{Ind}\,C, \end{aligned} \tag{49}$$

wo $C = \prod_{i=0}^{e-1(i)} c_1$ ist.

Nach Formel (45) haben die Partialnormen die Werte

$$n(\overset{(i)}{\pi}_1) = (-1)^e\, p\, \overset{(i)}{c}_0.$$

Also ist in diesem Falle

$$\mathrm{Ind}\,N(\pi) = \mathrm{Ind}\left(n(\overset{(i)}{c}_0)\right) + \lambda\,\mathrm{Ind}\,(-1).$$

Nun ist nach Gleichung (43)

$$\overset{(0)}{c}_0 = \frac{\pi^e}{-p} - c_{e-1}\pi^{e-1} - c_{e-2}\pi^{e-2} - \cdots - c_1\pi = w^{-g}(1+\cdots),$$

wo die Klammer eine Einseinheit ist und g den Index von $-p$ bedeutet. Also ist

$$\mathrm{Ind}\,n(\overset{(i)}{c}_0) = -g\,\frac{p^f-1}{p-1},$$

so daß man hat

$$\mathrm{Ind}\,N(\pi) = -g\,\frac{p^f-1}{p-1} + \lambda\,\mathrm{Ind}\,(-1)$$

und daher

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Ind}\,R = {} & e\,\mathrm{Ind}\,D(w) + e\,\mathrm{Ind}\,n(c_{\bar{e}-1}) - (\bar{e}+1)g\,\frac{p^f-1}{p-1} \\ & + \lambda\,\mathrm{Ind}\,(-1)\,\frac{2\bar{e}+e+1}{2} + 2\,\mathrm{Ind}\,Z, \end{aligned} \tag{50}$$

wo Z eine rationale p-adische Zahl bedeutet. Also läßt sich auch in diesem Falle der Regulatorindex vollständig angeben.

§ 3. Die multiplikative Darstellung der Einseinheiten von $K(\mathfrak{p})$.

Vollzieht man in den bisherigen Ergebnissen nach den in § 2 der ersten Arbeit hergeleiteten Vorschriften den Übergang zum Numerus, so lassen sich alle Ergebnisse der *Hensel*schen Abhandlungen H. II und H. IV auf höchst einfache Weise wiedergewinnen.

Ich mache gleich wieder die Voraussetzung, daß der Körper genau die primitiven p^{ν_ε}-ten Einheitswurzeln enthält, wo $0 \leqq \nu_\varepsilon \leqq \nu_0$ sein kann. Dann folgt aus der Darstellung aller Logarithmen durch das Fundamentalsystem (26) von § 1, S. 236

$$(1) \qquad l = \bar{c}_0 \overline{L}_0 + \bar{c}_1 \overline{L}_1 + \cdots + \bar{c}_{\varepsilon-1} \overline{L}_{\varepsilon-1} + c_{\varepsilon+1} l_{\varepsilon+1} + \cdots + c_\lambda l_\lambda$$

durch Übergang zum Numerus

$$(2) \qquad \eta = e^l = \omega^{\bar{c}_\varepsilon} (e^{\overline{L}_0})^{\bar{c}_0} (e^{\overline{L}_1})^{\bar{c}_1} \ldots (e^{\overline{L}_{\varepsilon-1}})^{\bar{c}_{\varepsilon-1}} \eta_{\varepsilon+1}^{c_{\varepsilon+1}} \ldots \eta_\lambda^{c_\lambda}$$

oder

$$(2a) \qquad \eta = \overline{\eta}_\varepsilon^{\bar{c}_\varepsilon} \overline{\eta}_0^{\bar{c}_0} \ldots \overline{\eta}_{\varepsilon-1}^{\bar{c}_{\varepsilon-1}} \eta_{\varepsilon+1}^{c_{\varepsilon-1}} \ldots \eta_\lambda^{c_\lambda} .$$

Also läßt sich jede Einseinheit durch ein Fundamentalsystem von $\lambda + 1$ Einseinheiten darstellen, von denen die erste eine primitive p^{ν_ε}-te Einheitswurzel ω ist, die hier der Gleichförmigkeit halber auch mit $\overline{\eta}_\varepsilon$ bezeichnet werden soll. Unter den λ übrigen Fundamentaleinheiten sind $\eta_{\varepsilon+1}, \ldots, \eta_\lambda$ regulär, können also als zweigliedrige Einseinheiten von der Form $\eta_i = 1 + \pi^{s_i} w_i$ gewählt werden, während $\overline{\eta}_0, \ldots, \overline{\eta}_{\varepsilon-1}$ irregulär sind. Da ihre Logarithmen

$$\overline{L}_i = \pi^{\bar{\mathsf{P}}_i} \overline{w}_i + \cdots = \pi^{\varrho_{h_i} - n_i e} \overline{w}_i + \cdots \qquad (i = 0, 1, \ldots, \varepsilon - 1)$$

nach § 1, S. 234 von höchster Irregularitätsordnung sind, besitzen $\overline{\eta}_0, \ldots, \overline{\eta}_{\varepsilon-1}$ selbst die „*höchsten Irregularitätsgrade*“ [1]), d. h. die Potenz $\overline{\eta}_i^{p^{\nu_i}}$ besitzt einen möglichst hohen Grad

$$(3) \qquad \bar{s}_i = \overline{\mathsf{P}}_i + \nu_i e \qquad (i = 0, 1, \ldots, f - 1).$$

Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Irregularitätsgrade

$$\begin{aligned} \bar{s}_i - \bar{s}_{i+1} &= \overline{\mathsf{P}}_i - \overline{\mathsf{P}}_{i+1} + (\nu_i - \nu_{i+1}) e \\ &= \varrho_{h_i} - (\nu_i - \nu_{i+1}) e + (\nu_i - \nu_{i+1}) e - \overline{\mathsf{P}}_{i+1} = \varrho_{h_i} - \overline{\mathsf{P}}_{i+1} < 0 \end{aligned}$$

ist stets negativ, denn nach der Übersicht (22) auf S. 234 gehören sowohl ϱ_{h_i} als $\overline{\mathsf{P}}_{i+1}$ als Logarithmenordnungen zu Einseinheiten desselben Grades $e_0 p^{\nu_0 - \nu_{i+1}}$; aber ϱ_{h_i} ist noch keine höchste Irregularitätsordnung, also sicher kleiner als $\overline{\mathsf{P}}_{i+1}$. Also bilden diese Irregularitätsgrade eine steigende Reihe

$$(4) \qquad \bar{s}_0 < \bar{s}_1 < \bar{s}_2 \ldots\ldots < \bar{s}_{\varepsilon-1} < \bar{s}_\varepsilon = +\infty ,$$

wo $\bar{s}_\varepsilon = +\infty$ der zur Einheitswurzel $\overline{\eta}_\varepsilon = \omega$ gehörige Irregularitätsgrad ist.

Da man nach dem in § 2 der ersten Arbeit, S. 186 f. angewandten Verfahren von einem beliebigen irregulären Logarithmus L_τ durch eine endliche Anzahl von Subtraktionen von Logarithmen regulärer zweigliedriger Einseinheiten zu dem

---

[1]) Vgl. S. 198 der ersten Arbeit.

Vielfachen $c_\tau \bar{L}_\tau$ eines Logarithmus von höchster Irregularitätsordnung gelangt, so ist auch umgekehrt

$$c_\tau \bar{L}_\tau = L_\tau + l_1 + l_2 + \cdots + l_n$$

gleich einer endlichen Summe von Logarithmen zweigliedriger Einseinheiten, denn für L_τ kann speziell der Logarithmus einer zweigliedrigen irregulären Einseinheit desselben Grades gewählt werden. Durch Übergang zum Numerus folgt daraus, daß die irregulären Basiseinheiten $\bar{\eta}_\tau$ (für $\tau = 0, 1, \ldots, \varepsilon - 1$) aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestehen, weil für

$$\bar{\eta}_\tau^{c_\tau} = (1 + \pi^{e_0 p^\tau} w^{\gamma_0 p^\tau} a)(1 + \pi^{k_1} w^{s_1}) \ldots (1 + \pi^{k_n} w^{s_n})$$

dasselbe gilt. Nur für die irregulären Logarithmen, die zu Einseinheiten der höchsten Grade

$$e_0 p^{\nu_0 - \nu_\varepsilon}, \quad e_0 p^{\nu_0 - \nu_\varepsilon + 1}, \ldots, e_0 p^{\nu_0}$$

gehören, umfaßt die Reduktion auf $\bar{L}_\varepsilon = 0$ unendlich viele Schritte, also besteht die zugehörige Einheitswurzel

$$\bar{\eta}_\varepsilon = e^{\bar{L}_\varepsilon} = \omega$$

aus unendlich vielen Gliedern.

Man kann daher folgendes Ergebnis aussprechen:

Enthält ein Körper die primitiven p^{ν_ε}-ten Einheitswurzeln $\bar{\eta}_\varepsilon$, so besteht das Fundamentalsystem für seine Einseinheiten

$$\bar{\eta}_0, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_\varepsilon, \quad \eta_{\varepsilon+1}, \ldots, \eta_\lambda$$

aus $\lambda + 1$ Elementen. Von diesen können die $\lambda - \varepsilon$ regulären

$$\eta_{\varepsilon+1}, \ldots, \eta_\lambda$$

als zweigliedrige Einseinheiten gewählt werden; $\bar{\eta}_\varepsilon$ ist eine primitive p^{ν_ε}-te Einheitswurzel, die aus unendlich vielen Gliedern besteht; $\bar{\eta}_0, \ldots, \bar{\eta}_{\varepsilon+1}$ sind irreguläre Einseinheiten der höchsten endlichen Irregularitätsgrade

$$\bar{s}_0 < \bar{s}_1 < \ldots\ldots < \bar{s}_{\varepsilon-1},$$

die eine ansteigende Reihe bilden; sie bestehen aus einer endlichen Anzahl von Gliedern.

Dieses Fundamentalsystem ist so beschaffen, daß sich aus den Potenzen seiner Elemente Basissysteme für die nicht äquivalenten Einseinheiten sämtlicher Grade bilden lassen, und zwar läßt sich eine Klasseneinteilung der Einseinheiten in $e + 1$ Klassen einführen, so daß alle und nur die Einseinheiten derselben Klasse durch die Potenzen derselben Basiselemente darstellbar sind. Rechnet man nämlich alle und nur die Einseinheiten mit modulo e kongruenten Logarithmenordnungen in dieselbe Klasse, so kann man die Ergebnisse von § 1, S. 229 wörtlich auf die Einseinheiten übertragen. Zu den $\lambda - \varepsilon$ regulären Logarithmenklassen gehören $\lambda - \varepsilon$ reguläre Einheitsklassen. Für sie gilt der einfache Satz:

Alle und nur die nicht äquivalenten Einseinheiten derselben regulären Klasse lassen sich bis auf eine Einseinheit höheren Grades durch die p^n-ten

Potenzen von f zweigliedrigen Einseinheiten niedrigsten Grades aus der betreffenden Klasse darstellen.

Aus der Gleichung für die Logarithmen

$$p^n l_k = c_1 p^n \overset{(k)}{l_1} + c_2 p^n \overset{(k)}{l_2} + \cdots + c_f p^n \overset{(k)}{l_f} + p^n l_{k+1}$$

folgt nämlich durch Übergang zum Numerus

$$\eta_k^{p^n} = \left(\overset{(k)}{\eta_1}{}^{p^n}\right)^{c_1} \left(\overset{(k)}{\eta_2}{}^{p^n}\right)^{c_2} \cdots \left(\overset{(k)}{\eta_f}{}^{p^n}\right)^{c_f} \eta_{K+1}. \tag{5}$$

Die p^n-ten Potenzen der Basiseinheiten k-ten Grades bilden also wieder Basissysteme für die Einseinheiten einer gesetzmäßig anwachsenden Reihe von Graden. Die Bestimmung sämtlicher Grade, welche die Einseinheiten derselben regulären Klasse annehmen können, liefert folgender Satz:

Es sei $\varkappa$ der kleinste Exponent, für den $\eta^{p^\varkappa}$ Exponentialeinheit ist. Ist dann $n \leqq \varkappa$, so ist η^{p^n} vom Grade $p^n k$; ist dagegen $n > \varkappa$, also von der Form $n = \varkappa + n_0$, so ist η^{p^n} vom Grade $p^\varkappa k + n_0 e$.

Der Logarithmus $p^n \log \eta_k$ von $\eta_k^{p^n}$ besitzt nämlich die Ordnung $\varrho_k + ne$. Dazu gehört nach § 2, Gl. 2, S. 186 der ersten Arbeit für $n \leqq \varkappa$ der Grad

$$k_n = \frac{\varrho_k + ne + (\varkappa - n)e}{p^{\varkappa - n}} = \frac{(\varrho_k + \varkappa e) \cdot p^n}{p^\varkappa} = k p^n .$$

Für $n > \varkappa$ dagegen ist

$$\varrho_k + ne = p^\varkappa k - \varkappa e + (\varkappa + n_0)e = p^\varkappa k + n_0 e > r;$$

also liegt der Logarithmus einer Exponentialeinheit vor, deren Grad mit der Logarithmenordnung übereinstimmt, also in der Tat den Wert $p^\varkappa k + n_0 e$ besitzt.

Sämtliche Einseinheiten der regulären Klasse $\mathfrak{K}_k$ besitzen also Grade, die der Reihe

$$k,\ pk,\ p^2k, \ldots,\ p^\varkappa k;\quad p^\varkappa k + e,\ p^\varkappa k + 2e, \ldots$$

angehören. Den Zusammenhang zwischen Potenzdarstellung, Logarithmenordnung und Grad für die Einseinheiten derselben regulären Klasse zeigt folgende Übersicht:

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \text{Einseinheit:} & \eta & \eta^p & \ldots\ \eta^{p^\varkappa} & \ldots\ \eta^{p^{\varkappa+n_0}} & \ldots \\ \text{Logarithmenordnung:} & \varrho_k & \varrho_k + e & \ldots\ \varrho_k + \varkappa e & \ldots\ \varrho_k + (\varkappa + n_0)e & \ldots \\ \text{Grad:} & k & pk & \ldots\ p^\varkappa k & \ldots\ p^\varkappa k + n_0 e & \ldots \end{array}\right. \tag{6}$$

Somit ist der in H. II, § 4, S. 202 ausgesprochene Satz wiedergewonnen:

Sind $\left(\overset{(k)}{\eta_1} \ldots \overset{(k)}{\eta_f}\right)$ Basiselemente für die Einseinheiten k-ten Grades, wo k nicht durch p teilbar ist, so bilden die Systeme

$$\left(\overset{(k)}{\eta_i}\right),\ \left(\overset{(k)}{\eta_i}{}^{p}\right), \ldots \left(\overset{(k)}{\eta_i}{}^{p^\varkappa}\right);\ \left(\overset{(k)}{\eta_i}{}^{p^\varkappa+1}\right), \ldots, \left(\overset{(k)}{\eta_i}{}^{p^{\varkappa+n_0}}\right), \ldots \quad (i = 1, \ldots, f)$$

von je f Einheiten der Reihe nach Basen für die Grade

$$k,\ pk, \ldots,\ p^\varkappa k;\ p^\varkappa k + e, \ldots,\ p^\varkappa k + n_0 e, \ldots$$

Ist $\eta = 1 + \pi^k w^s + \cdots$, so hat η^p das Hauptglied $p\pi^k w^s$ für $k > r$, denn für Exponentialeinheiten stimmen das Anfangsglied des Logarithmus und das Hauptglied des Numerus überein. Für $k < r$ gehört zum Anfangsglied

$$p\,\pi^{\varrho k}w^s = \pi^{\varrho k+e}w^{p^\varkappa s-\varkappa q+q}$$

der logarithmischen Reihe der Grad pk und der Index

$$s_1 \equiv \frac{p^\varkappa s-(\varkappa-1)q+(\varkappa-1)q}{p^{\varkappa-1}} \equiv ps \pmod{p^f-1};$$

also hat in diesem Falle η^p das Hauptglied $\pi^{pk}w^{ps}$. Für $k=r=\dfrac{e}{p-1}=e^{(0)}$ endlich ist wegen $\varrho_{e^{(0)}}=e^{(0)}$

$$\begin{aligned} p\log\eta_{e^{(0)}} &= p\,\pi^{\varrho_{e^{(0)}}}(w^{s_0}-w^{s_0p}w^{-g})+\cdots \\ &= \pi^{e^{(0)}+e}(w^{s_0p}-w^{s_0}w^g)+\cdots \end{aligned}$$

von höherer als r-ter Ordnung; also hat die zugehörige Exponentialeinheit das Hauptglied $\pi^{e^{(0)}p}(w^{s_0p}-w^{s_0}w^g)$. Der Logarithmenklasse K_0 entspricht die Einheitenklasse $\mathfrak{R}_0$ der p^{ν_ε}-ten irregulären Einheitswurzeln, die sich sämtlich als Potenzen eines primitiven Elements $\bar\eta_\varepsilon=\omega$ darstellen lassen. Den ε übrigen irregulären Logarithmenklassen entsprechen ε irreguläre Einheitenklassen, in denen irreguläre Einseinheiten von höchstem Irregularitätsgrade vorkommen. Auch für diese Klassen läßt sich die zugehörige Gradreihe aus der Übersicht (22) auf S. 234 leicht ablesen. Zu den Logarithmenordnungen einer irregulären logarithmischen Klasse

$$\begin{aligned} &\bar{\mathsf{P}}_i=\varrho_{h_i}-(\nu_i-\nu_{i+1})e;\ \bar{\mathsf{P}}_i+e=\varrho_{h_i}-(\nu_i-\nu_{i+1}-1)e;\ldots; \\ &\bar{\mathsf{P}}_i+(\nu_i-\nu_{i+1})e=\varrho_{h_i};\ \varrho_{h_i}+e;\ldots;\ \varrho_{h_i}+\nu_{i+1}e;\ \varrho_{h_i}+(\nu_{i+1}+1)e\ldots \end{aligned}$$

gehören nämlich die Grade

$$e_0p^{\nu_0-\nu_i};\ e_0p^{\nu_0-\nu_i+1};\ldots;\ e_0p^{\nu_0-\nu_{i+1}-1};\ h_i;\ ph_i;\ldots;\ p^{\nu_{i+1}}h_i=\bar s_i;\ \bar s_i+e;\ldots.$$

Zu den Graden

$$e_0p^{\nu_0-\nu_i};\ e_0p^{\nu_0-\nu_i+1};\ldots;\ e_0p^{\nu_0-\nu_{i+1}-1}$$

gehören irreguläre Einseinheiten von höchster Irregularitätsordnung, die sich sämtlich durch die Potenzen eines einzigen Basiselements $\bar\eta_i$ darstellen lassen. Zu den folgenden Graden

$$h_i;\ ph_i;\ldots,\ p^{\nu_{i+1}-1}h_i;\ \bar s_i;\ \bar s_i+e;\ldots$$

gehören reguläre Einheiten; alle nicht äquivalenten desselben Grades lassen sich durch die p^n-ten Potenzen der f Basiselemente für den Grad h_i:

$$\bar\eta_i^{p^{\nu_i-\nu_{i+1}}};\ \overset{(h_i)}{\eta_1},\ \overset{(h_i)}{\eta_2},\ldots,\ \overset{(h_i)}{\eta_{f-1}}$$

darstellen, von denen das erste die Logarithmenordnung $\bar{\mathsf{P}}_i+(\nu_i-\nu_{i+1})e=\varrho_{h_i}$ besitzt, also in der Tat vom Grade h_i ist. Gehört $\mathfrak{R}_{e_0}$ zu den regulären Klassen, so bilden für die regulären Einseinheiten der Grade

$$e_0,\ e_0p,\ \ldots,\ e_0p^{\nu_0-1}$$

die $f-1$ Elemente

$$\overset{(e_0)}{\eta_1},\ \overset{(e_0)}{\eta_2},\ldots,\ \overset{(e_0)}{\eta_{f-1}}$$

und deren p^n-te Potenzen die Basissysteme; für die Einseinheiten der Grade

$$e_0p^{\nu_0},\ e_0p^{\nu_0}+e_1,\ldots$$

treten das Ersatzelement $\overset{(e_0 p^{\nu_0})}{\eta} = 1 + \Pi^p \xi_0$ vom Grade $e_0 p^{\nu_0}$ und dessen $p^{n-\nu_0}$-te Potenzen hinzu. Gehört dagegen $\mathfrak{R}_{e_0}$ zu den irregulären Klassen, so sind nur die Basen für die Grade

$$e_0,\ e_0 p,\ \ldots,\ e_0 p^{\nu_0-\nu_{\varepsilon-1}-1}$$

$(f-1)$-gliedrig, während für die Einseinheiten der Grade

$$e_0 p^{\nu_0-\nu_{\varepsilon-1}},\ \ldots,\ e_0 p^{\nu_0},\ e_0 p^{\nu_0}+e, \ldots$$

das irreguläre Element $\bar{\eta}_{\varepsilon-1}$ vom Grade $e_0 p^{\nu_0-\nu_{\varepsilon-1}}$ und dessen $p^{n-(\nu_0-\nu_{\varepsilon-1})}$-te Potenzen hinzutreten. Also enthält in diesem Falle das Fundamentalsystem keine reguläre Ersatzeinheit des Grades $e_0 p^{\nu_0}$, sondern an ihre Stelle tritt die Potenz $\bar{\eta}_{\varepsilon-1}^{p^{\nu_\varepsilon-1}}$ einer irregulären Einseinheit.

Während man also genau wie für die regulären Klassen den Satz aussprechen kann:

Alle nicht äquivalenten Einseinheiten derselben Klasse sind durch die Potenzen derselben Basiselemente darstellbar,

verliert der auf S. 246 angegebene Satz über die Darstellung aller Einseinheiten der Gradreihe

$$k,\ pk, \ldots,\ p^x k,\ p^x k + e, \ldots,\ p^x k + n_0 e, \ldots$$

durch die Potenzen derselben Basiselemente für $k = e_0$ seine Gültigkeit. Der Grund dafür liegt darin, daß nicht mehr alle nicht äquivalenten Einseinheiten der Grade

$$e_0,\ e_0 p,\ \ldots,\ e_0 p^{\nu_0-1}$$

derselben Klasse $\mathfrak{R}_{e_0}$ angehören, sondern daß die irregulären von höchstem Irregularitätsgrade unter ihnen auf die $\varepsilon+1$ irregulären Klassen verteilt sind. Um daher aus dem Fundamentalsystem Basissysteme für die Einseinheiten sämtlicher Grade zu bilden, muß man folgendermaßen verfahren:

Ist der Grad k nicht von der Form $e_0 p^\tau$, so sind die f Basiselemente derjenigen Klasse $\mathfrak{R}_h$ zu entnehmen, deren reduzierte Logarithmenordnung zu ϱ_k modulo e kongruent ist. Kommt man dabei auf eine der irregulären Klassen, ist also ϱ_k zu einer der höchsten Irregularitätsordnungen $\overline{\mathsf{P}}_i$ modulo e kongruent, so besteht das Basissystem aus den f Elementen

$$\bar{\eta}_i^{p^{\nu_i-\nu_i+1}};\ \overset{(h_i)}{\eta}_1, \ldots,\ \overset{(h_i)}{\eta}_{f-1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, \varepsilon-1)$$

oder deren p^n-ten Potenzen; der Exponent des ersten Basiselements ist also stets durch eine höhere Potenz von p teilbar als die übrigen. Ist dagegen

$$k = e_0,\ e_0 p,\ \ldots,\ e_0 p^{\nu_0-1},$$

so muß man zu den $f-1$ regulären Basiseinheiten aus der Klasse $\mathfrak{R}_{e_0}$ noch die Einseinheiten der höchsten Irregularitätsgrade

$$\begin{aligned}(7)\qquad &\bar{\eta}_0,\ \bar{\eta}_0^p, \ldots,\ \bar{\eta}_0^{p^{\nu_0-\nu_1-1}};\ \bar{\eta}_1,\ \bar{\eta}_1^p, \ldots,\ \bar{\eta}_1^{p^{\nu_1-\nu_2-1}};\ \ldots\\ &\bar{\eta}_{\varepsilon-1},\ \bar{\eta}_{\varepsilon-1}^p, \ldots,\ \bar{\eta}_{\varepsilon-1}^{p^{\nu_\varepsilon-1-\nu_\varepsilon-1}};\ \bar{\eta}_\varepsilon,\ \bar{\eta}_\varepsilon^p, \ldots,\ \bar{\eta}_\varepsilon^{p^{\nu_\varepsilon-1}}\end{aligned}$$

aus den irregulären Klassen

$$\mathfrak{R}_{h_0},\ \mathfrak{R}_{h_1}, \ldots,\ \mathfrak{R}_{h_{\varepsilon-1}},\ \mathfrak{R}_0$$

hinzunehmen, um Basissysteme für alle regulären und irregulären Einseinheiten der Grade

$$e_0,\ e_0 p,\ \ldots,\ e_0 p^{\nu_0-\nu_1-1};\ e_0 p^{\nu_0-\nu_1},\ e_0 p^{\nu_0-\nu_1+1},\ \ldots,\ e_0 p^{\nu_0-\nu_2-1};\ \ldots$$
$$e_0 p^{\nu_0-\nu_{\varepsilon-1}-1},\ e_0 p^{\nu_0-\nu_{\varepsilon-1}+1},\ \ldots,\ e_0 p^{\nu_0-\nu_\varepsilon-1};\ e_0 p^{\nu_\varepsilon},\ \ldots,\ e_0 p^{\nu_0-1}$$

zu gewinnen. Für alle Grade

$$k = e_0 p^{\nu_0},\ e_0 p^{\nu_0}+e,\ \ldots,\ e_0 p^{\nu_0}+me,\ \ldots$$

endlich besteht die Basis aus den f Elementen

$$\overset{(e_0)}{\eta}_1^{p^{\nu_0}},\ \overset{(e_0)}{\eta}_2^{p^{\nu_0}},\ \ldots,\ \overset{(e_0)}{\eta}_{f-1}^{p^{\nu_0}};\ \overset{(e_0 p^{\nu_0})}{\eta}$$

und deren p^m-ten Potenzen, wo $\overset{(e_0 p^{\nu})}{\eta}$ entweder das reguläre Ersatzelement $1+\Pi^p\xi_0 = 1+\pi^{e_0 p^{\nu_0}} w^{q_0 p^{\nu_0}}\xi_0+\cdots$ oder die Potenz des irregulären Elements $\bar{\eta}_{\varepsilon-1}^{p^{\nu_\varepsilon}-1}$ bedeutet, je nachdem $\mathfrak{R}_{e_0}$ eine reguläre oder eine irreguläre Klasse ist. Der Exponent des letzten Basiselements ist in diesem Falle stets durch eine niedrigere Potenz von p teilbar als die übrigen. Diese Basiselemente gehören wieder sämtlich zur gleichen Klasse $\mathfrak{R}_{e_0}$.

Man erhält also in diesem allgemeinsten Körper für jede beliebige $\mathfrak{p}$-adische Zahl die Darstellung

$$\beta = \pi^a w^b \eta = \pi^a w^b \bar{\eta}_0^{\bar{c}_0}\bar{\eta}_1^{\bar{c}_1}\ldots\bar{\eta}_{\varepsilon-1}^{\bar{c}_{\varepsilon-1}}\bar{\eta}_\varepsilon^{\bar{c}_\varepsilon}\eta_{\varepsilon+1}^{c_{\varepsilon+1}}\ldots\overset{(e_0 p^{\nu_0})c_\lambda}{\eta}. \tag{8}$$

Darin durchläuft $\bar{c}_\varepsilon$ alle Werte unterhalb p^{ν_ε}, b alle diejenigen unterhalb p^f-1, a alle ganzen rationalen Zahlen, während alle übrigen Exponenten beliebige ganze rationale p-adische Zahlen sind. Vereinigt man die primitive p^{ν_ε}-te Einheitswurzel $\bar{\eta}_\varepsilon$ mit der primitiven (p^f-1)-ten Einheitswurzel w zu einer primitiven $(p^f-1)\cdot p^{\nu_\varepsilon}$-ten und bezeichnet diese höchste in $K(\mathfrak{p})$ vorhandene Einheitswurzel mit v, so erhält man die Darstellung

$$\beta = \pi^a v^{\bar{b}}\bar{\eta}_0^{\bar{c}}\ldots\bar{\eta}_{\varepsilon-1}^{\bar{c}_{\varepsilon-1}}\eta_{\varepsilon+1}^{c_{\varepsilon+1}}\ldots\overset{(e_0 p^{\nu_0})c_\lambda}{\eta_\lambda}\quad(\mathfrak{p}), \tag{9}$$

die genau $\lambda = e\,.\,f$ Fundamentaleinheiten enthält und wohl als die einfachste und naturgemäßeste betrachtet werden darf.

Für $\varepsilon = 0$, also wenn in $K(\mathfrak{p})$ die p^{ν_0}-ten Einheitswurzeln existieren, wird

$$\beta = \pi^a v^{\bar{b}}\eta_1^{c_1}\ldots\overset{(e_0 p^{\nu_0})c_\lambda}{\eta_\lambda}\quad(\mathfrak{p}); \tag{10a}$$

also treten in diesem Falle außer v nur reguläre Fundamentaleinheiten auf. Für $\nu_\varepsilon = 0$, also für reguläre Körper, ist zu beachten, daß die Ersatzeinheit $\overset{(e_0 p^{\nu_0})}{\eta}$ durch η_λ vom Grade e_0 zu ersetzen ist, während v in w übergeht, so daß man hat

$$\beta = \pi^a w^b \eta^{c_1}\eta^{c_2}\ldots\eta_\lambda^{c_\lambda}\quad(\mathfrak{p}). \tag{10b}$$

Wendet man die Methoden und Ergebnisse dieser Arbeit auf die quadratischen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper an, so erhält man alle Ergebnisse von H. I, § 5 auf sehr einfache und übersichtliche Weise; es ist besonders interessant, daß schon in diesem einfachsten Körper alle von der Theorie vorausgesagten Besonderheiten wirklich eintreffen. Ebenso hat sich die logarithmische Methode bei der Untersuchung der algebraischen Zahlen für eine Primteilerpotenz als Modul, wie sie in H. III und in H. IV, § 4 zum ersten Male in voller Allgemeinheit durchgeführt ist, als recht einfach und brauchbar erwiesen.

Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen

Von

Prof. Dr. L. Schlesinger und **Dr. A. Plessner**

Oktav. VIII, 229 Seiten. Geh. M. 14.—, geb. M. 16.—

Die Verallgemeinerung und Neufassung des Integralbegriffs, die Henri Lebesgue um die Jahrhundertwende gegeben hat, und die damit einhergegangene Vertiefung und Systematisierung der gesamten reellen Funktionentheorie hat sich zu einem der reizvollsten und folgenreichsten Kapitel der mathematischen Analyse entwickelt; das vorliegende Buch will angehenden Mathematikern einen Zugang zu dieser verhältnismäßig neuen und noch wenig verbreiteten Lehre eröffnen.

Deutsche Literaturzeitung

Für Kritik der internationalen Wissenschaft

Herausgegeben vom Verbande der deutschen Akademien der Wissenschaften Berlin, Göttingen, Heidelberg, Leipzig, München und Wien

Redaktionsausschuß:

Adolf v. Harnack, Arrien Johnsen, Paul Kehr, Heinrich Lüders, Heinrich Maier, Eduard Meyer, Walter Nernst, Albrecht Penck, Max Planck, Ulrich Stutz, Ulrich v. Wilamowitz-Moellendorff unter Vorsitz von Julius Petersen

Schriftleiter:

Prof. Dr. Paul Hinneberg, Berlin

Wöchentlich 1 Heft

Pro Heft M. 1.25 monatlich M. 4.50 vierteljährlich M. 12.—

„Hier tritt ein großes Rezensionsorgan in einer Form auf, die Sachlichkeit und Leistung verbürgt und Achtung verlangen darf. Herausgeber ist die vornehmste Genossenschaft deutscher Wissenschaft, der Verband der vereinigten Akademien der Wissenschaften Deutschlands und Österreichs."

Frankfurter Zeitung.

Probenummern kostenlos durch jede Buchhandlung oder direkt vom Verlage

---

Walter de Gruyter & Co. :-: Berlin W 10

SAMMLUNG GÖSCHEN

Jeder Band gebunden Rm. 1.50

Mathematik

Geschichte der Mathematik. Von Prof. Dr. H. Wieleitner. 2 Bde. . . . . Bd. 226, 875
Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen, in zwei Farben zusammengestellt. Von Prof. Dr. Hermann Schubert. Neue Ausgabe von Prof. Dr. Robert Haußner . . . . . Bd. 81
Fünfstellige Logarithmen. Von Direktor Prof. Aug. Adler . . . . . Bd. 423
Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik. Von Prof. O. Th. Bürklen. Mit 18 Figuren. . . . . Bd. 51
Gruppentheorie. Von Dr. Ludwig Baumgartner. Mit 6 Figuren . . . . . Bd. 837
Arithmetik. Von Prof. Dr. Hermann Schubert und Prof. Dr. Paul B. Fischer . . . Bd. 47
Elementare Algebra. Von Prof. Dr. Paul B. Fischer Mit 20 Fig. . . . . Nr. 930
Höhere Algebra. Von Prof. Dr. H. Hasse. I. Lineare Gleichungssysteme . . . . Nr. 931
Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra. Von Prof. Dr. Hermann Schubert . . Bd. 48
Politische Arithmetik. Von Prof. Dr. E. Foerster Bd. 879
Determinanten. Von Prof. Paul B. Fischer Bd. 402
Vektoranalysis. Von Prof. Dr. Siegfr. Valentiner. Mit 16 Figuren . . . . . Bd. 354
Niedere Analysis. Von Prof. Dr. B. Sporer. Mit 6 Figuren . . . . . Bd. 53
Höhere Analysis I: Differentialrechnung. Von Rektor Dr. Friedrich Junker. Mit 68 Fig. Bd. 87
Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. Von Rektor Dr. Friedrich Junker. Mit 46 Figuren . . . . . Bd. 146
Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Priv.-Doz. Dr. H. Hoheisel . . . . Nr. 920
Höhere Analysis II: Integralrechnung. Von Rektor Dr. Friedrich Junker. Mit 89 Fig. Bd. 88
Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. Von Rektor Dr. Friedrich Junker. Mit 50 Figuren . . . . . Bd. 147
Graphische Integration. Von Dr. F. A. Willers. Mit 53 Figuren . . . . . Bd. 801
Numerische Integration. Von Dr. F. A. Willers. Mit 2 Figuren . . . . . Bd. 864
Einleitung in die Funktionentheorie (Theorie der komplexen Zahlenreihen). Von Oberlehrer M. Rose. Mit 10 Figuren . . . . Bd. 581
Funktionentheorie. Von Prof. Dr. K. Knopp.
I. Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 9 Figuren. Bd. 668
II. Anwendungen der Theorie zur Untersuchung spezieller analytischer Funktionen. Mit 10 Figuren . . . . . Bd. 703
Aufgabensammlung zur Funktionentheorie I. Von Prof. Dr. K. Knopp . . . . . Bd. 877
Potentialtheorie. Von Dr. W. Sternberg. I. Die Elemente der Potentialtheorie. Mit 5 Fig. Nr. 901
Ebene Geometrie. Von Prof. G. Mahler. Mit 110 zweifarbigen Figuren . . . . . Bd. 41
Stereometrie. Von Prof. Dr. Robert Glaser. Mit 81 Figuren . . . . . Bd. 97
Sammlung von Aufgaben aus der Stereometrie. Von Prof. Dr. Robert Glaser. Mit 54 Fig. Bd. 779
Ebene und sphärische Trigonometrie. Von Prof. Dr. Gerhard Hessenberg. Mit 59 Figuren. Bd. 99
Sammlung von Aufgaben aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Von Studienrat Dr. Fritz Heiland. Mit 26 Figuren . . Bd. 848
Koordinatensysteme. Von Prof. Paul B. Fischer Bd. 507
Analytische Geometrie der Ebene. Von Prof. Dr. M. Simon. Mit 57 Figuren . . . Bd. 65
Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. Von Prof. O. Th. Bürklen. Mit 32 Figuren . . . . . Bd. 256
Analytische Geometrie des Raumes. Von Prof. Dr. M. Simon. Mit 28 Figuren . . . Bd. 89
Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes. Von Prof. O. Th. Bürklen. Mit 7 Figuren . . . . . Bd. 309
Algebraische Kurven. Neue Bearbeitung von Prof. Dr. H. Wieleitner.
I. Gestaltliche Verhältnisse. Mit 97 Fig. Bd. 435
II. Theorie und Kurven dritter und vierter Ordnung. Mit 52 Figuren . . . . . Bd. 436
Einführung in die konforme Abbildung. Von Prof. Dr. Ludwig Bieberbach . . . Bd. 768
Darstellende Geometrie. Von Prof. Dr. Robert Haußner. Mit 150 Figuren. 2 Bde. Nr. 142, 143
Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. Von Prof. Dr. K. Doehlemann. Mit 91 Figuren. 2 Bände. . . . . Bd. 72, 876
Geometrischen Zeichnen. Von H. Becker. Neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn. Mit 290 Fig. und 23 Tafeln. . . . . Bd. 58
Praktisches Zahlenrechnen. Von Prof. Dr.-Ing. P. Werkmeister. Mit 58 Figuren . . Bd. 405
Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. Von Oberingenieur Privatdozent Dr. Marcello Pirani. Mit 58 Figuren . . Bd. 728
Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von Professor Wilhelm Weitbrecht. 2 Bde. . . . . Bd. 302, 641
Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Prof. Dr. O. Knopf. Mit 10 Fig. 2 Bde. Bd. 508, 871
Vermessungskunde. Von Prof. Dipl.-Ing. P. Werkmeister. Mit 300 Fig. 3 Bde. Nr. 468, 469, 862
Geodäsie. Von Prof. Dr. E. Reinhertz. Neubearbeitet von Dr. G. Förster. Mit 68 Fig. Nr. 102
Mathematische Instrumente. Von Dr. Fr. A. Willers. Mit 68 Figuren. . . . . Nr. 922

Vollständige Verzeichnisse der Sammlung Göschen stehen durch jede Buchhandlung oder direkt vom Verlage kostenlos zur Verfügung

Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10